

Kaksirivinen determinantti

Kaksirivinen determinantti

Kolmirivinen determinantti

Determinantin yleinen kehittäminen

Determinantin ominaisuuksia

Nimityksiä tulevaa varten

Aiheet

Kaksirivinen determinantti

Kaksirivinen determinantti

Kolmirivinen determinantti

Determinantin yleinen kehittäminen

Determinantin ominaisuuksia

Nimityksiä tulevaa varten

2×2 -matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

2×2 -matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esim. Jos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

niin

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla eliminoimalla muuttuja y .

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \cdot a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \cdot (-a_{12}) \end{cases}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla eliminoimalla muuttuja y .

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \cdot a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \cdot (-a_{12}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

JOHTOPÄÄTÖS:

Kahden yhtälön ja kahden muuttujan yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

3×3 -matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} [2] & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = +[2] \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & [3] & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - [3] \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & [1] \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + [1] \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = & +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
 = & 2 \cdot (5 \cdot 7 - 0 \cdot (-6)) - 3 \cdot (0 \cdot 7 - 0 \cdot 4) + 1 \cdot (0 \cdot (-6) - 5 \cdot 4)
 \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tämä varten

Esimerkki

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = & +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
 = & 2 \cdot (5 \cdot 7 - 0 \cdot (-6)) - 3 \cdot (0 \cdot 7 - 0 \cdot 4) + 1 \cdot (0 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) \\
 = & 2 \cdot (35 - 0) - 3 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (0 - 20)
 \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tämä varten

Esimerkki

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = & +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
 = & 2 \cdot (5 \cdot 7 - 0 \cdot (-6)) - 3 \cdot (0 \cdot 7 - 0 \cdot 4) + 1 \cdot (0 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) \\
 = & 2 \cdot (35 - 0) - 3 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (0 - 20) \\
 = & 70 - 0 - 20 = 50
 \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tämä varten

Determinantti voidaan kehittää minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen.

Merkit pitää katsoa kaaviosta

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

**Determinantin
yleinen
kehittäminen**

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ [0] & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = -[0] \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

**Determinantin
yleinen
kehittäminen**

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & [5] & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + [5] \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinantti**Determinantin
yleinen
kehittäminen**Determinantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & [0] \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - [0] \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & [0] \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = & -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - [0] \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\ = & -0 + 5 \cdot (14 - 4) - 0 = 50 \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

► $\det(I) = 1$.

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

**Determinantin
ominaisuuksia**

Nimityksiä
tulevaa varten

- ▶ $\det(I) = 1$.
- ▶ Neliömatriisi \mathbf{A} on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi \mathbf{A}^{-1}), jos ja vain jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

- ▶ $\det(I) = 1$.
- ▶ Neliömatriisi \mathbf{A} on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi \mathbf{A}^{-1}), jos ja vain jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- ▶ $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

- ▶ $\det(I) = 1$.
- ▶ Neliömatriisi \mathbf{A} on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi \mathbf{A}^{-1}), jos ja vain jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- ▶ $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
- ▶ $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

- ▶ Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

**Determinantin
ominaisuuksia**

Nimityksiä
tulevaa varten

- ▶ Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- ▶ Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0

Aiheet

Kaksirivinen
determinantti

Kaksirivinen
determinantti

Kolmirivinen
determinantti

Determinantin
yleinen
kehittäminen

Determinantin
ominaisuuksia

Nimityksiä
tulevaa varten

- ▶ Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- ▶ Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0
- ▶ Jos jokin kaavion rivi lisätään reaaliluvulla kerrottuna kaavion toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantin arvo on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantin arvo (sama pätee sarakkeille)

Aiheet

Kaksirivinen determinantti

Kaksirivinen determinantti

Kolmirivinen determinantti

Determinantin yleinen kehittäminen

Determinantin ominaisuuksia

Nimityksiä tulevaa varten

- ▶ Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- ▶ Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0
- ▶ Jos jokin kaavion rivi lisätään reaaliluvulla kerrottuna kaavion toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantin arvo on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantin arvo (sama pätee sarakkeille)
- ▶ Kolmiomuodossa olevan kaavion determinantti on diagonaali-alkioiden tulo.

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minori} = \det(\mathbf{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minori} = \det(\mathbf{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

$$\text{Kofaktori} = (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) = -30$$

Aiheet

Kaksirivinen
determinanttiKaksirivinen
determinanttiKolmirivinen
determinanttiDeterminantin
yleinen
kehittäminenDeterminantin
ominaisuuksiaNimityksiä
tulevaa varten