

Homogeenisen yhtälöryhmän ei-triviaali ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 2a/3 \\ x_2 = 2a/3 \\ x_3 = a \end{cases}, \quad \text{missä } a \neq 0$$

Toisaalta tässä esimerkissä  $x_1 + x_2 + x_3 = 70$ , joten

$$\begin{aligned} \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + a &= 70 \\ \Leftrightarrow \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{3a}{3} &= 70 \\ &\Leftrightarrow \frac{7a}{3} = 70 \\ &\Leftrightarrow a = 30 \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 30 \end{cases}.$$

## 3.12 Matriisilaskut Excel-ohjelmalla

Excel on taulukkolaskenta -ohjelmisto, jonka vahvinta sovellusalueita on kirjanpidon ja budjetoinnin kaltaiset rahalaskut. Toisaalta kaikki laskeminen, johon liittyy numero-  
taulukoita tai -kaavioita soveltuu Excelillä tehtäväksi. Excelissä on useita tilastollisia funktioita valmiina. Tässä lyhyessä esityksessä käydään läpi vain vektoreihin ja matriiseihin liittyviä toimintoja

**Kaavan sijoittaminen soluun.** Excel-työpohja (Worksheet) on suuri taulukko, jossa sarakkeet nimetään kirjaimin (A, B, C, ...) ja rivit nimetään numeroin (1, 2, 3, ...). Soluihin voidaan tallettaa lukuja, merkkijonoja ja kaavoja.

Olkoon työpohja seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E
1					
2			25		
3			10		
4					
5					

Siis solun C2 on sijoitettu luku 25, ja soluun C3 on sijoitettu luku 10 ja muut solut ovat tyhjiä. Soluun C4 sijoitetaan kaava  $\overline{=C2+C3}$ . (Huomaa: kaava alkaa =-merkillä!) Kaavan tultua valmiiksi painetaan [Enter]-näppäintä, jolloin ohjelma laskee lausekkeen C2+C3 arvon ja sijoittaa sen soluun C4.

	A	B	C	D	E
1					
2			25		
3			10		
4			35		
5					

Kun myöhemmin vie solukohdistimen soluun C4 ja painaa [F2]-näppäintä, pääsee tilaan, jossa kaavaa voi editoida.

	A	B	C	D	E
1					
2			25		
3			10		
4			=C2+C3		
5					

**Rivioperaatiot.** Seuraavassa laskentapohjassa on yhtälöryhmän kerroinkaavio

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3		-2
2		2	5	8		<-
3						
4						
5						
6						

Kopioidaan ensin pivot-rivi B1:D1 paikkaan B4:D4 copy-paste -toiminnolla. Toinen tapa on toimia seuraavasti:

- (1) Maalaa alue B4:D4
- (2) Kirjoita kaava:
- (3) Näppäile: [Ctrl]-[Shift]-[Enter]

Varsinainen rivi-operaatio saadaan aikaan seuraavasti:

- (1) Maalaa alue B5:D5
- (2) Kirjoita kaava:
- (3) Näppäile: [Ctrl]-[Shift]-[Enter]

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3		-2
2		2	5	8		<-
3						
4		1	2	3		
5		0	1	2		
6						

Huomautus: Kun sijoitetaan kaava yhteen soluun, riittää näppäillä lopuksi [Enter]. Kun kaavan antama tulos on vektori tai matriisi, joka sijoitetaan monesta solusta muodostuvaan alueeseen, pitää lopuksi näppäillä [Ctrl]-[Shift]-[Enter]. (Paina ensin [Ctrl] ja [Shift] pohjaan ja pidä ne pohjassa samalla kun painat [Enter]-näppäintä.)

**Kahden matriisin summa.** Seuraavassa laskentapohjassa on kaksi  $2 \times 3$ -matriisia; alueessa B1:D2, ja alueessa F1:H3. Näiden matriisien summa on myös  $2 \times 3$ -matriisi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	-1	-1		1	4	3	
2		2	1	0		2	0	-2	
3									
4									
5									
6									

Lasketaan summa-matriisi ja sijoitetaan se paikkaan B4:D5 seuraavasti:

- (1) Maalaa alue B4:D5
- (2) Kirjoita kaava:
- (3) Näppäile: [Ctrl]-[Shift]-[Enter]

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	-1	-1		1	4	3	
2		2	1	0		2	0	-2	
3									
4		2	3	2					
5		4	1	-2					
6									

**Matriisitulo MMULT.** Seuraavassa laskentapohjassa on kaksi matriisia;  $2 \times 3$ -matriisi alueessa B1:D2, ja  $3 \times 3$ -matriisi alueessa F1:H3. Näiden matriisien tulo on  $2 \times 3$ -matriisi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	-1	-1		1	4	3	
2		2	1	0		2	0	-2	
3						0	1	5	
4									
5									
6									

Lasketaan tulomatriisi ja sijoitetaan se paikkaan B4:D5 seuraavasti:

(1) Maalaa alue B4:D5

(2) Kirjoita kaava: `=MMULT(B1:D2;F1:H3)`

(3) Näppäile: `[Ctrl]-[Shift]-[Enter]`

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	-1	-1		1	4	3	
2		2	1	0		2	0	-2	
3						0	1	5	
4		-1	3	0					
5		4	8	4					
6									

**Determinantti MDETERM.** Seuraavassa laskentapohjassa on  $3 \times 3$ -matriisi alueella F1:H2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1						1	4	3	
2						2	0	-2	
3						0	1	5	
4									
5									

Lasketaan matriisin determinantti ja sijoitetaan se paikkaan C4 seuraavasti:

(1) Vie solukohdistin soluun C4

(2) Kirjoita kaava: `=MDETERM(F1:H3)`

(3) Näppäile: `[Enter]`

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1						1	4	3	
2						2	0	-2	
3						0	1	5	
4			-32						
5									

**Käänteismatriisi MINVERSE.** Seuraavassa laskentapohjassa on  $3 \times 3$ -matriisi alueessa F1:H2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1						1	4	3	
2						2	0	-2	
3						0	1	5	
4									

Lasketaan matriisin käänteismatriisi ja sijoitetaan se paikkaan B4:D3 seuraavasti:

(1) Maalaa alue B1:D3

(2) Kirjoita kaava:

(3) Näppäile: [Ctrl]-[Shift]-[Enter]

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		-0,06250	0,53125	0,25000		1	4	3	
2		0,31250	-0,15625	-0,25000		2	0	-2	
3		-0,06250	0,03125	0,25000		0	1	5	
4									

**Yhtälöryhmän ratkaisu käänteismatriisin avulla.** Seuraavassa laskentapohjassa on yhtälöryhmän kerroinkaavio.

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3		
2		2	5	8		
3						
4						
5						
6						

Ratkaistaan yhtälöryhmä periaatteella

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Lasketaan ratkaisuvektori  $\vec{x}$  ja sijoitetaan se alueeseen B4:B5 seuraavasti:

(1) Maalaa alue B4:B5

(2) Kirjoita kaava: `=MMULT(MINVERSE(B1:C2);D1:D2)`

(3) Näppäile: `[Ctrl]-[Shift]-[Enter]`

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3		
2		2	5	8		
3						
4		-1				
5		2				
6						

**Transpoosi.** Joskus on tarpeen vaihtaa taulukon rivit sarakkeiksi (ja sarakkeet riveiksi). Jos aineisto on iso, niin ainoa järkevä tapa toimia on käyttää transpoosi-komentoa.

	A	B	C	D	E	F
1			1	2	3	
2			2	5	8	
3						
4						
5						
6						

Transponoidaan kaavio C1:E2 ja sijoitetaan se alueeseen A3:B5 seuraavasti:

(1) Maalaa alue A3:B5

(2) Kirjoita kaava: `=TRANSPOSE(C1:E2)`

(3) Näppäile: `[Ctrl]-[Shift]-[Enter]`

Näiden näppäilyjen jälkeen laskentapohja on seuraavan näköinen

	A	B	C	D	E	F
1			1	2	3	
2			2	5	8	
3	1	2				
4	2	5				
5	3	8				
6						

### 3.13 MatLab-ohjelmoinnin alkeita

Matlab-ohjelma on yhdysvaltalaisen yrityksen, MathWorks Inc., valmistama tuote. (ks. <http://www.mathworks.com/>) Tuote on ollut markkinoilla vuodesta 1984, ja siitä on kehittynyt yksi teknillisen laskennan ”standardi”. Matlab tarjoaa ohjelmointiympäris-