

1. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-20 + 18) + 2 \cdot (0 + 6) + 1 \cdot (0 - 3)$$

$$= -2 + 12 - 3 = 7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -20 \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -(-7) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} + 0 - 0 = 42$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = +(-7) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 21$$

$$\begin{cases} x = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2 \\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{42}{7} = 6 \\ z = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{7} = 3 \end{cases}$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y + az = 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & a \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (a + 18) + 2 \cdot (0 + 6) + 1 \cdot (0 - 3) \\ &= a + 18 + 12 - 3 = \underline{a + 27} \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & a \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & a \end{vmatrix} - 0 + 0 = -7 \cdot (a + 18)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = -(-7) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 0 - 0 = 42$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-7) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 21$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7 \cdot (a + 18)}{a + 27}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{42}{a + 27}$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{a + 27}$$

3. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x + 9y - 11z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-12}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -z & (1) \\ y = z & (2) \end{cases}$$

Valitaan $z = 3$

$$(2) \rightarrow y = 3$$

$$(1) \rightarrow 3x - 3 \cdot 3 = -3$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Vast. $x=2, y=3, z=3$

$$\left(\begin{array}{l} \text{tark. } 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 3 = 0 \checkmark \\ 3 - 3 = 0 \checkmark \\ 3 \cdot 2 + 9 \cdot 3 - 11 \cdot 3 = 0 \checkmark \end{array} \right)$$

4. a) Millä a :n arvolla alla olevalla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu? Mikä se on?

b) Millä a :n arvolla yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu? Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu?

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

yksikäsitteinen ratkaisu ($x=0, y=0, z=0$) jos kerrainkaavion determinantti $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow +4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (0 - 3) + (-6 + 9) + a(3 - 0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -12 + 3 + 3a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a \neq 3}$$

b) ei triviaali ratkaisu, jäs $a=3$

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 & \cdot 1 \\ y - z = 0 & \cdot 1 \\ 3x - 2y + 3z = 0 & \leftarrow \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - z = 0 \\ \underline{0 = 0} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 3x - 3y = -4z & (1) \\ y = z & (2) \end{cases}$$

Valitaan $z=3$

$$(2) \rightarrow y=3$$

$$(1) \rightarrow 3x - 3 \cdot 3 = -4 \cdot 3$$

$$\underline{x = -1}$$

$$\underline{\text{Vast: } x = -1, y = 3, z = 3}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tark.} \\ 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 0 \\ 3 - 3 = 0 \\ 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 0 \end{array} \right)$$

5. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

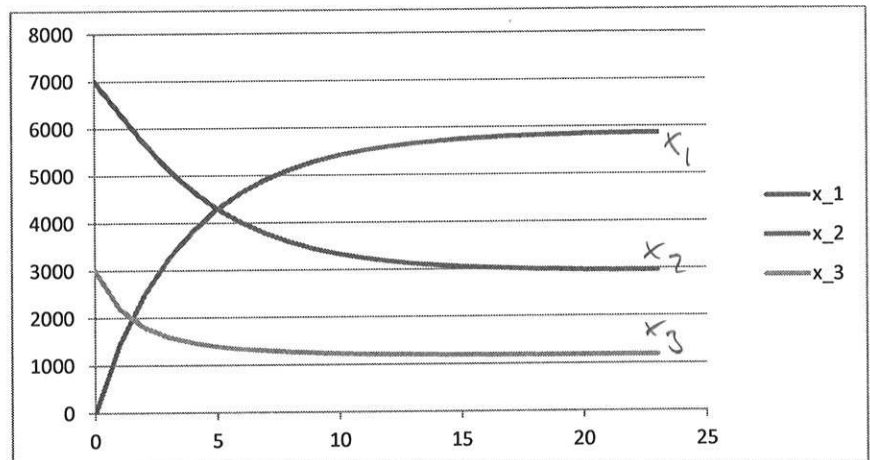
Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on

$\vec{x}_0 = (0 \ 7000 \ 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \dots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1, \dots, 100$.)

P =

0,9	0,1	0,25
0,05	0,8	0,25
0,05	0,1	0,5

k	x_1	x_2	x_3
0	0	7000	3000
1	1450	6350	2200
2	2490	5702,5	1807,5
3	3263,125	5138,375	1598,5
4	3850,275	4673,481	1476,244
5	4301,657	4300,36	1397,984
6	4651,023	4004,867	1344,111
7	4922,435	3772,472	1305,093
8	5133,712	3590,373	1275,916
9	5298,357	3447,963	1253,681
10	5426,738	3336,708	1236,554
11	5526,873	3249,842	1223,285
12	5604,991	3182,038	1212,97
13	5665,939	3129,123	1204,939
14	5713,492	3087,83	1198,678
15	5750,595	3055,608	1193,797
16	5779,546	3030,465	1189,989
17	5802,135	3010,847	1187,018
18	5819,761	2995,539	1184,701
19	5833,514	2983,594	1182,892
20	5844,245	2974,274	1181,481
21	5852,618	2967,002	1180,38
22	5859,151	2961,327	1179,521
23	5864,249	2956,9	1178,851



6. Mikä on tehtävässä 5 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

Ohje: Tasapainojakauma toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} P\vec{x}^* = \vec{x}^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,90x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = x_1^* \\ 0,05x_1^* + 0,80x_2^* + 0,25x_3^* = x_2^* \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* + 0,50x_3^* = x_3^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ + \leftarrow \\ + \leftarrow \\ + \leftarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2,5 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right)$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2,5 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +(-1) \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2,5 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -(-4-5) - (1-5) + 2,5(1+4) = 25,5$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2,5 \\ 0 & -4 & 5 \\ 10000 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10000 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2,5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 15 \cdot 10000$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2,5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 10000 & 1 \end{vmatrix} = -10000 \begin{vmatrix} -1 & 2,5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7,5 \cdot 10000$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 10000 \end{vmatrix} = +10000 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10000$$

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{D_1}{D} = \frac{15 \cdot 10000}{25,5} = 5882 \\ x_2^* = \frac{D_2}{D} = \frac{7,5 \cdot 10000}{25,5} = 2941 \\ x_3^* = \frac{D_3}{D} = \frac{3 \cdot 10000}{25,5} = 1176 \end{cases}$$

7. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros ~ yksi kuukausi. Kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.

a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}.$$

b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*.$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?

a) Excel $0,40 \cdot 51919,18 = \underline{\underline{20767,67 \text{ €}}}$

b) $12 \cdot 0,40 \cdot 5882 = \underline{\underline{28233,6 \text{ €}}}$

Hyödy kampanjasta $(28233,6 - 20767,7) \text{ €} = \underline{\underline{7466 \text{ €}}}$