

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, (ma 5.8.2013)

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2x + 2 = 7x + 8$

$$2x - 7x = 8 - 2$$

$$-5x = 6$$

$$x = \frac{6}{-5}$$

$$\underline{\underline{x = -1,2}}$$

b) $6(x + 2) = 5x + 10$

$$6x + 12 = 5x + 10$$

$$6x - 5x = 10 - 12$$

$$\underline{\underline{x = 8}}$$

c) $3x + 1 = 3(x + 1)$

$$3x + 1 = 3x + 3$$

$$3x - 3x = 3 - 1$$

$$0 = 2 \text{ epätos.}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{R_j = \emptyset}}$$

2. Ratkaise yhtälöt

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$$a=2, b=3, c=1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = -1}}$$

b) $5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4$

$$5x^2 - 4x^2 + x + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$a=1, b=3, c=-4$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 1 \text{ tai } x = -4}}$$

c) $(x + 1)(x - 3) = (x + 1)$

$$x^2 - 3x + x - 3 = x + 1$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a=1, b=-3, c=-4$$

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 4 \text{ tai } x = -1}}$$

3. Ratkaise yhtälöt

a) $2^x = 3$

b) $\ln(x-1) = 100$

c) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^x &= 3 \quad | \ln \\ \ln(2^x) &= \ln 3 \\ x \ln(2) &= \ln(3) \\ x &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ x &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \ln(x-1) &= 100 \\ x-1 &= e^{100} \\ x &= e^{100} + 1 \\ x &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2x+1}{x-1} &= 3 \quad | \cdot (x-1) \\ x &\neq 1 \\ 2x+1 &= 3 \cdot (x-1) \\ 2x+1 &= 3x-3 \\ -x &= -4 \\ x &= 4 \quad \text{ok} \end{aligned}$$

4. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x-1 \leq 3x+1$

b) $3(x+1) \geq 5(x-1)$

$$\begin{aligned} x-1 &\leq 3x+1 \\ x-3x &\leq 1+1 \\ -2x &\leq 2 \quad | : (-2) \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

tark.

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow \begin{cases} x-1 = 1-1 = 0 \\ 3x+1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{LHS} < \text{RHS} \\ \text{OK} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=-2 &\rightarrow \begin{cases} x-1 = -2-1 = -3 \\ 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{LHS} > \text{RHS} \\ \text{OK} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(x+1) &\geq 5(x-1) \\ 3x+3 &\geq 5x-5 \\ 3x-5x &\geq -5-3 \\ -2x &\geq -8 \quad | : (-2) \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

5. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25.20€ ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18.10€ (per tuote). Myyntitulo on $256 \cdot 25.20\text{€} = 6451.20\text{€}$, valmistuskustannus on $256 \cdot 18.10\text{€} = 4633.60\text{€}$. Kate on myyntitulo - valmistuskustannus $= 6451.20\text{€} - 4633.60\text{€} = 1817.60$. Kate on siis 28.17% myynnistä.

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 5,0%.

- Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- Laske helmikuun kate (euroina).
- Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

	Tamm.	Helmi	
myynti (kpl/kk)	$n_1 = 256 \text{ kpl/kk}$	$n_2 = 300 \text{ kpl/kk}$	
myyntihinta (€/kpl)	$p_1 = 25,20 \text{ €/kpl}$	$p_2 = 25,20 \text{ €/kpl}$	
myynti (€/kk)	$R_1 = n_1 \cdot p_1 = 6451,20 \text{ €/kk}$	$R_2 = n_2 \cdot p_2 =$	(a)
valm. kust. (€/kpl)	$c_1 = 18,10 \text{ €/kpl}$	$c_2 = 1,05 \cdot 18,10 \text{ €/kpl}$	
kok. kust. (€/kk)	$C_1 = c_1 \cdot n_1 = 4633,60 \text{ €/kk}$	$C_2 = c_2 \cdot n_2 =$	(b)
kate (€/kk)	$K_1 = R_1 - C_1 = 1817,60 \text{ €/kk}$	$K_2 = R_2 - C_2 =$	(c)
Kateprosentti $K/R \cdot 100\%$	$Kp_1 = \frac{K_1}{R_1} \cdot 100\% = 28,17\%$	$Kp_2 = \frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% =$	(d)

$$\begin{aligned}
 a) \quad R_2 &= n_2 \cdot p_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 7560,00 \text{ €/kk} \\
 b) \quad C_2 &= c_2 \cdot n_2 = 1,05 \cdot 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 5701,50 \text{ €/kk} \\
 c) \quad K_2 &= R_2 - C_2 = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 5701,50 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = 1858,50 \text{ €/kk} \\
 d) \quad Kp_2 &= \frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% = \frac{1858,50}{7560} \cdot 100\% = 24,58\% \\
 e) \quad \frac{R_2 - R_1}{R_1} \cdot 100\% &= \frac{7560 - 6451,2}{6451,2} \cdot 100\% = 17,19\% \\
 f) \quad \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot 100\% &= \frac{5701,5 - 4633,6}{4633,6} \cdot 100\% = 23,05\% \\
 g) \quad \frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% &= \frac{1858,5 - 1817,6}{1817,6} \cdot 100\% = 2,25\% \\
 h) \quad Kp_2 - Kp_1 &= 24,58\% - 28,17\% = -3,59\%
 \end{aligned}$$

∴ kate kasvoi 2,25%
 kate pieneni 3,6 prosenttiyksiköllä

6. Yritys tarvitsee raaka-aineena pahvia, joka kerätään kierrätysmateriaalista. Kierrätysmateriaalia voidaan ostaa kolmesta paikasta (A, B, C). Kaikki kierrätysmateriaali pitää vielä itse tarkastaa ja hylätyn materiaalin toimittaminen eteenpäin aiheuttaa edelleen kustannuksia. Seuraavassa taulukossa on esitetty keskimääräisiä lukuja eri vaihtoehdoista. Laske raaka-aine -pahvin tonnihinta kussakin hankintavaihtoehdossa.

	A	B	C
kierrätysmateriaalin hinta (per tonni)	100.00	125.00	95.00
Hylättävän materiaalin osuus	6.0%	2.0%	10.0%
Tarkastuksen hinta (per kierr.mat.tonni)	10.0€	11.0€	12.0€
Hylätyn materiaalin käsittely (€/tonni)	20.0	15.0	5.0

Tilataan X tn

Saatuun lopullisen materiaali-erän yksikköhinta

$$p = \frac{\text{mitä maksot}}{\text{mitä saatiin}}$$

$$\textcircled{A} \quad p = \frac{\overbrace{100 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot X \text{ tn}}^{\text{ostu}} + \overbrace{10,0 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot X \text{ tn}}^{\text{tarkistus}} + \overbrace{20,0 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot 0,06 \cdot X \text{ tn}}^{\text{hylätyn käs}}}{\underbrace{0,94 X \text{ tn}}_{\text{mitä saatiin}}}$$

$$= \frac{111,20 \text{ €}}{0,94 \text{ tn}} = \underline{\underline{118,30 \text{ €/tn}}}$$

$$\textcircled{B} \quad p = \frac{125 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot X \text{ tn} + 11 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot X \text{ tn} + 15 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot 0,02 \cdot X \text{ tn}}{0,98 X \text{ tn}}$$

$$= \frac{136,3 \text{ €}}{0,98 \text{ tn}} = \underline{\underline{139,08 \text{ €/tn}}}$$

$$\textcircled{C} \quad p = \frac{95 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot X \text{ tn} + 12 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot X \text{ tn} + 5 \frac{\text{€}}{\text{tn}} \cdot 0,10 \cdot X \text{ tn}}{0,90 \text{ tn}}$$

$$= \frac{107,5 \text{ €}}{0,90 \text{ tn}} = \underline{\underline{119,44 \text{ €/tn}}}$$