Vaasan kesäyliopisto, kevät 2013

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

4. harjoitus, (ke 14.8.2013)

1. a) Laske 7.15% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.006325?

Kuukausikorkokanta = i
kuukausikorkotekijä = $1+i$
vuosikorkotekijä = $(1+i)^{12} = 1{,}0715$

a) $(1+i)^{12} = 1{,}0715$
$\Leftrightarrow$ $1+i = 1{,}0715^{1/12}$
$i = 1{,}0715^{\frac{1}{12}} - 1 = \underline{0{,}00577155293}$

b) Tod. vuosikorkotekijä
$= (1+i)^{12}$
$= 1{,}006325^{12}$
$= 1{,}07859683\text{9} \approx 1{,}0786$

$\rightarrow$ Tod. vuosikorko on $\underline{7{,}86\,\%}$

Vastaus: a) kuukausikorkokanta on 0,00577155293
b) Todellinen vuosikorko on 7,86 %

2. 1.1.2012 yrittäjä ottaa 20 000 euron lainan. Laina-ajaksi sovitaan 17 kuukautta ja lainan todelliseksi vuosikoroksi 4.50%. Yrittäjä ei lyhennä lainaansa eikä maksa korkoja ennen kuin laina-aika on kulunut loppuun 31.5.2013. Silloin hän hoitaa kertamaksulla lainan korkoineen. Miten suureksi laina kasvaa, kun:
(a) Korkojakso on vuosi, ja korko lasketaan yksinkertaisella korkolaskulla.
(b) Korkojakso on kuukausi ja $i = 1.045^{(1/12)} - 1$.
(c) Käytetään jatkuvaa korkolaskua ja korkointensiteetti on $\rho = \ln(1.045)$.

a) 1.1.2012 laina nostetaan saldo = 20000 €
31.12.2012 lainaan lisätään korko
$\frac{4{,}50}{100} \cdot 20000\,€ = 900\,€$ saldo = 20900 €
31.5.2013 lainaan lisätään korko
$\frac{5}{12} \cdot 0{,}045 \cdot 20900\,€ = 391{,}88\,€$ saldo = $\underline{\underline{21291{,}88\,€}}$

3. Sinulle tarjotaan arvopaperia, jonka voit kahden ja puolen vuoden kuluttua vaihtaa 2000 euroon. Mihin hintaan olet valmis ostamaan arvopaperin, kun haluat sijoittamallesi alkupääomalle vähintään 7,00% vuosikoron?

$$\text{Nykyarvo} = \frac{2000\,€}{(1{,}07)^{2{,}5}} = \underline{\underline{1688{,}77\,€}}$$

4. Kirjoita seuraavan summan kaikki termit näkyviin ja laske summa sitten sopivalla kaavalla. (vihje: $s = n(a_1 + a_n)/2$.)

$$\sum_{k=3}^{20}(3+2k)$$

$$\sum_{k=3}^{20}(3+2k) = 9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29$$
$$+31+33+35+37+39+41+43$$

Aritmeettinen summa

$a_1 = 9$, $a_n = 43$, $n = 18$ $(n = 20-3+1)$

$$\sum_{k=3}^{20}(3+2k) = n\cdot\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) = 18\cdot\left(\frac{9+43}{2}\right) = 468$$

5. Kirjoita seuraavan summan kaikki termit näkyviin ja laske summa sitten sopivalla kaavalla. (vihje: $s = a_1(1-q^n)/(1-q)$.)

a) $S_1 = \sum_{k=2}^{6}(\frac{1}{5}\cdot 2^k)$ b) $S_2 = \sum_{k=2}^{6}(\frac{1}{5}+2^k)$

a) $$S_1 = \sum_{k=2}^{6}\left(\frac{1}{5}\cdot 2^k\right) = \frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{16}{5}+\frac{32}{5}+\frac{64}{5}$$

Geometrinen summa

$a_1 = \frac{4}{5}$, $q = 2$, $n = 5$ $(n = 6-2+1)$

$$S_1 = a_1\frac{(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{4}{5}\frac{(1-2^5)}{(1-2)} = \frac{4}{5}\cdot\frac{(1-32)}{(1-2)} = 24{,}8$$

b) 17 kuukaudessa lainan pääoma kasvaa arvoon

$$K_{17} = (1+i)^{17} K_0$$

$$= 1{,}045^{17/12} \cdot 20000\,€ = \underline{\underline{21286{,}85\,€}}$$

c) Jatkuvan korkolaskun mukaan kasvanut pääoma on

$$K_t = e^{\varrho t} K_0 \quad \text{, missä}$$

$\varrho = \ln(1+i_{vuosi}) =$ korkointensiteetti $[\varrho] = \frac{1}{vuosi}$
$t =$ kulunut aika vuosissa $[t] =$ vuosi

Nyt $t = \frac{17}{12}$ vuotta $= 1{,}4166667$ vuotta
$\varrho = \ln(1{,}045) \frac{1}{vuotta} = 0{,}044016885 \frac{1}{vuosi}$

$$\therefore K_t = e^{0{,}044016885 \cdot 1{,}4166667} \cdot 20000\,€ = 21286{,}85\,€$$

b) ja c) kohdissa tulos on sama!

Syy: $K_t = e^{\varrho t} K_0 \quad \leftarrow$ c)

$$= \left(e^{\ln(1+i)}\right)^t K_0$$

$$= (1+i)^{17/12} \cdot K_0 \quad \leftarrow \text{b)}$$

$\therefore$ lausekkeet merkitsevät samaa

b) $S_2 = \sum_{k=2}^{6} \left(\frac{1}{5} + 2^k\right)$

$= \left(\frac{1}{5}+4\right) + \left(\frac{1}{5}+8\right) + \left(\frac{1}{5}+16\right) + \left(\frac{1}{5}+32\right) + \left(\frac{1}{5}+64\right)$

$= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) + \left(4+8+16+32+64\right)$

$= 5\cdot\frac{1}{5} + 4\cdot\frac{(1-2^5)}{(1-2)} = 1 + 124 = \underline{\underline{125}}$

6. Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 10 000€, laina-aika on kaksi vuotta ja kolme kuukautta, lainan todellinen vuosikorko on 4,25% ja lainaa hoidetaan kuukausittain.
(Vihje: $n = 27$, $(1+i) = 1{,}0425^{1/12}$)

$K = cK_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\cdot K_0 \qquad 1+i = 1{,}0425^{1/12}$

$= \frac{[1{,}0425^{1/12} - 1]\, 1{,}0425^{27/12}}{(1{,}0425^{27/12} - 1)} \cdot 10\,000\,€$

$= \underline{\underline{388{,}66\,€}}$ (tark. $27 \cdot 388{,}66\,€ = 10\,493{,}82\,€$ ok)

7. Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 10 000€, laina-aika on kaksi vuotta ja kolme kuukautta, lainan todellinen vuosikorko on 4,25% ja lainaa hoidetaan kuukausittain, ja sovitaan että kolme ensimmäistä kuukautta ovat lyhennysvapaat.
(Vihje: $n = 24$, $K_0 = (1+i)^3 \cdot 10000€$)

Ensimmäiset kolme kuukautta laina kasvaa korkoa korolle $\rightarrow$ $K_3 = (1+i)^3 K_0$
Sen jälkeen laina hoidetaan 24 kuukaudessa

$k = c_{i;24} K_3 = \left(\frac{i(1+i)^{24}}{(1+i)^{24} - 1}\right)\cdot (1+i)^3 K_0$

$= \frac{[1{,}0425^{\frac{1}{12}} - 1]\, 1{,}0425^{24/12}}{(1{,}0425^{24/12} - 1)} \cdot (1{,}0425^{3/12}) \cdot 10\,000\,€$

$= \underline{\underline{439{,}55\,€}}$ (Tark. $24 \cdot 439{,}55\,€ = 10\,549{,}2\,€$
$1{,}0425^{3/12} \cdot 10000\,€ = 10\,104{,}6\,€$
ok)