

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

8. harjoitus, (to 22.8.2013)

1. Tarkastellaan matriisia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu $\mathbf{A}$:n käänteismatriisi on oikein.

Siis tarkista, että seuraavat ovat totta

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ratkaise tämän tiedon avulla x ja y yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina $(x_0 \ y_0)^T$. Merkitään vektorilla $(x_1 \ y_1)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla $(x_2 \ y_2)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Laske vektorit $(x_1 \ y_1)^T$ ja $(x_2 \ y_2)^T$.

Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (??) ja (??) on käyttää periaatetta: ”ratkaisu on $\mathbf{A}^{-1}$ kertaa RHS”.

3. a) Kun yhtälöryhmä (??) muutettiin yhtälöryhmäksi (??), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

b) Kun yhtälöryhmä (??) muutettiin yhtälöryhmäksi (??), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista $\mathbf{A}^{-1}$?

4. Laske determinantit

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Laske a) determinantti $\det(\mathbf{M})$ b) transpoosi $\mathbf{M}^T$ ja c) käänteismatriisi $\mathbf{M}^{-1}$ matriisille $\mathbf{M}$.

6. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille $\mathbf{N}$.