

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu  $A$ :n käänteismatriisi on oikein.

Siis tarkista, että seuraavat ovat totta

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ratkaise tämän tiedon avulla  $x$  ja  $y$  yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = 1 & \text{✓} & b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 = 1 & \text{✓} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0 & \text{✓} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0 & \text{✓} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0 & \text{✓} & \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 0 & \text{✓} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1 & \text{✓} & \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 1 & \text{✓} \end{array}$$

$$c) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \\ -5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = 8, y = -13$$

$$\text{Tark. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-13) \\ 5 \cdot 8 + 3 \cdot (-13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ✓}$$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina  $(x_0 \ y_0)^T$ . Merkitään vektorilla  $(x_1 \ y_1)^T$  sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla  $(x_2 \ y_2)^T$  sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Laske vektorit  $(x_1 \ y_1)^T$  ja  $(x_2 \ y_2)^T$ .

Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin  $A$  käänteismatriisi  $A^{-1}$  on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (??) ja (??) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on  $A^{-1}$  kertaa RHS".

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} \quad [1c)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. a) Kun yhtälöryhmä (??) muutettiin yhtälöryhmäksi (??), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

↖  $A^{-1}$  in 1. sarake

b) Kun yhtälöryhmä (??) muutettiin yhtälöryhmäksi (??), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista  $A^{-1}$ ?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↑  
 $A^{-1}$ :n 2. sarake

#### 4. Laske determinantit

a)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

a)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 2 - 3 = \underline{\underline{-1}}$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$   
 $= 2 \cdot (1 - 0) - 0 \cdot (5 - 0) + 1 \cdot (5 - 3) = \underline{\underline{4}}$

c)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

5. Laske a) determinantti  $\det(M)$  b) transpoosi  $M^T$  ja c) käänteismatriisi  $M^{-1}$  matriisille  $M$ .

$$a) \det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot (3 - 0) - 2(2 - 0) + 0 = \underline{\underline{-1}}$$

$$b) M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (-1)}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 2 \cdot 1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$