

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaattikaavalla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a/ \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_2 \cdot (-1/2) \\ R_3 \cdot 1/5 \end{smallmatrix}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0,6 & 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0 & 1 & -0,4 & -0,6 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_1 \leftarrow R_1 - 0,6R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 0,4R_3 \end{smallmatrix}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & -0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ -0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b/ \quad \det(N) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$N_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad N_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad N_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$N_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad N_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad N_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$N_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad N_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad N_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \frac{1}{\det(N)} \begin{pmatrix} +N_{11} & -N_{21} & +N_{31} \\ -N_{12} & +N_{22} & -N_{32} \\ +N_{13} & -N_{23} & +N_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} +(1) & -(-3) & +(2) \\ -(4) & +(-2) & -(-2) \\ +(5) & -(5) & +(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Onko matriisi

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

säännöllinen (eli onko sillä käänteismatriisi)?

(Ohje: Voit lopettaa laskemisen sillä hetkellä, kun olet varma, että käänteismatriisi löytyy. On olemassa monta tapaa saada vastaus selville. Helpoin tapa on laskea determinantti kehittämällä determinantti sopivaa riviä käyttäen.)

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 = 2 \neq 0 \rightarrow Q \text{ on säännöllinen}$$

3. Alla on taulukossa esitettyä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	p_1
	Os2	10	40	50	400	500	p_2
	Os3	20	0	30	200	250	p_3
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00

$$A = \begin{pmatrix} \frac{50}{1000} & \frac{100}{500} & \frac{0}{250} \\ \frac{10}{1000} & \frac{40}{500} & \frac{50}{250} \\ \frac{20}{1000} & \frac{0}{500} & \frac{30}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,20 & 0 \\ 0,01 & 0,08 & 0,20 \\ 0,02 & 0 & 0,12 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{300}{1000} & \frac{0}{500} & \frac{700}{250} \\ \frac{400}{1000} & \frac{400}{500} & \frac{0}{250} \\ \frac{70}{1000} & \frac{100}{500} & \frac{150}{250} \\ \frac{10}{1000} & \frac{15}{500} & \frac{10}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,30 & 0 & 2,80 \\ 0,40 & 0,80 & 0 \\ 0,07 & 0,20 & 0,60 \\ 0,01 & 0,03 & 0,04 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1,00 \\ 10,00 \\ 20,00 \\ 50,00 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = ?$$

$$\bar{P}^T = \bar{C}^T B (I - A)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,30 & 0 & 2,80 \\ 0,40 & 0,80 & 0 \\ 0,07 & 0,20 & 0,60 \\ 0,01 & 0,03 & 0,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & -0,20 & 0 \\ -0,01 & 0,92 & -0,20 \\ -0,02 & 0 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$Excel = \begin{pmatrix} 7,177 & 16,234 & 22,780 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} P_1 &= 7,18 \text{ €} \\ P_2 &= 16,23 \text{ €} \\ P_3 &= 22,78 \text{ €} \end{aligned}$$

4. Kasvata edellisen tehtävän yksikköhintoja siten, että jokaisesta tuotteesta saadaan 15% kate. Laske sitten jokaisen osaston kokonaistuotokset, myyntituotot ja tuotannontekijöiden kustannukset, kun lopputuotteiden myynti muuttuu seuraavan taulukon mukaiseksi.

	myynti (kpl)
Os1	500
Os2	1000
Os3	400

Miten suuren katteen yritys kokonaisuudessaan saa ?

$$\left. \begin{aligned} \text{Myyntihinta } p_i^* &= k p_i \\ \text{omakustannusarvo } p_i & \\ \text{kate } 15\% & \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} k p_i - p_i &= 0,15 k p_i \\ 0,85 k &= 1 \\ k &= \frac{1}{0,85} \end{aligned}$$

$$P_1^* = \frac{7,17679 \text{ €}}{0,85} = 8,44 \text{ €}$$

$$P_2^* = \frac{16,23408 \text{ €}}{0,85} = 19,10 \text{ €}$$

$$P_3^* = \frac{22,78047 \text{ €}}{0,85} = 26,80 \text{ €}$$

Myyntitulo

$$\bar{p}^T \bar{d} = (8,44 \quad 19,74 \quad 26,80) \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 400 \end{pmatrix} = 34\,680 \text{€}$$

Valmistuskustannukset

$$\begin{aligned} \bar{c}^T B \bar{x} &= \underbrace{\bar{c}^T B (I-A)^{-1}}_{\bar{p}^T} \bar{d} \\ &= (7,177 \quad 16,234 \quad 22,780) \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 400 \end{pmatrix} \\ &= 28\,934,5 \text{€} \end{aligned}$$

$$\text{Kate } 34\,680 \text{€} - 28\,934,5 \text{€} = 5\,745,5 \text{€} \\ (16,6\%)$$

5. Millä vakion a arvoilla matriisi

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on säännöllinen?

W on säännöllinen $\Leftrightarrow \det(W) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \cdot (0 - 1) + 0 - a(-1 - 0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 0 + a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq -3$$

Vast: W on säännöllinen, jos $a \neq -3$

6. Määritä edellisen tehtävän matriisin W käänteismatriisi.

$$\det(W) = a+3 \quad (\text{laskettiin edellisessä tehtävässä})$$

$$W_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \quad W_{12} = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad W_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$W_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad W_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad W_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$W_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a-1 \quad W_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = -a-3 \quad W_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$W^{-1} = \frac{1}{\det(W)} \begin{pmatrix} +W_{11} & -W_{21} & +W_{31} \\ -W_{12} & +W_{22} & -W_{32} \\ +W_{13} & -W_{23} & +W_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+3} \begin{pmatrix} +(-a) & -(-1) & +(2a-1) \\ -(0) & +(0) & -(-a-3) \\ +(3) & -(-1) & +(-7) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+3} \begin{pmatrix} -a & 1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a+3 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tark. } W^{-1}W = \frac{1}{(a+3)} \begin{pmatrix} -a & 1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a+3 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+3} \begin{pmatrix} a+3+0 & -2a+1+2a-1 & -a+a+0 \\ 0+0+0 & 0+0+a+3 & 0+0+0 \\ -3+3+0 & 6+1-7 & 3+a+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$