Vaasan yliopisto, kevät 2007

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

kuoritentti, 4.5.2007

Opettaja: Matti Laaksonen, matemaattisten tieteiden laitos, (D211/Tervahovi)

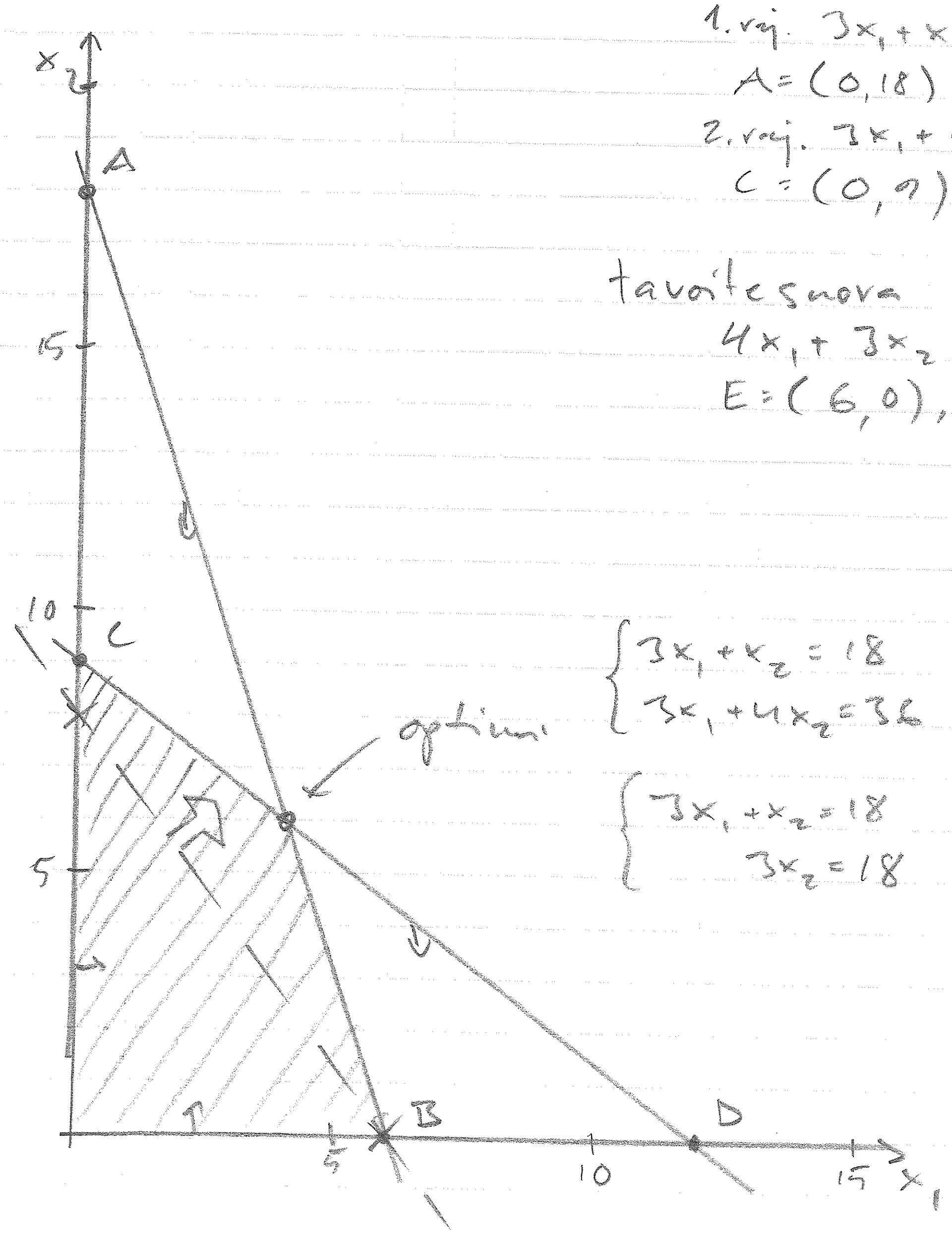
Kokeessa on aikaa 3 tuntia. **Ratkaise neljä tehtävää!**
Kun ratkaiset tehtävän, käsittele kaikki sen alakohdat.

1. Ratkaise graafisesti LP-malli

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{maksimoi} & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 36 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1. raj. $3x_1 + x_2 \leq 18$ ↓ alap.
$A = (0,18)$, $B = (6,0)$
2. raj. $3x_1 + 4x_2 \leq 36$ ↓ alap.
$C = (0,9)$, $D = (12,0)$

tavoitesuora
$4x_1 + 3x_2 = 24$
$E = (6,0)$, $F = (0,8)$



$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 18 & -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}}$$

$z = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 6$
$= 16 + 18$
$= \underline{34}$

2. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.025\,q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.1q^2 + 5q + 150$. Maksimoi voitto.

$$p = 20 - 0{,}025q \Rightarrow R = pq = 20q - 0{,}025q^2$$
$$MR = 20 - 0{,}05q$$

$$C = 0{,}1q^2 + 5q + 150 \Rightarrow MC = 0{,}2q + 5$$

$$MC = MR$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2q + 5 = 20 - 0{,}05q$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}25q = 15 \qquad |\cdot 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{q = 60}$$

$$P(60) = R(60) - C(60)$$
$$= 20\cdot 60 - 0{,}025\cdot 60^2 - (0{,}1\cdot 60^2 + 5\cdot 60 + 150)$$
$$= 1200 - 90 - (360 + 300 + 150)$$
$$= \underline{300}$$

Vastaus: voitto on suurin, kun $q = 60$
voitto on silloin $P = 300$

3. Laske a) transpoosi $\mathbf{A}^T$ b) determinantti $\det(\mathbf{A})$ c) käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a)
$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

b)
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2(1\cdot(-4) - 7\cdot 0) + (1\cdot(-4) - 7\cdot(-2)) - 2(1\cdot 0 - 1\cdot(-2))$$
$$= 2(-4 - 0) + (-4 + 14) - 2(0 + 2)$$
$$= -8 + 10 - 4$$
$$= -2$$

c) $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 10$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12$ $\quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -5$ $\quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 16$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} +(-4) & -4 & +(-5) \\ -10 & +(-12) & -16 \\ +2 & -(-2) & +3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2{,}5 \\ 5 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

4. a) Miten määritellään y:n jousto x:n suhteen?
b) Tuotteen hinta on nyt 12.25 € ja sen kysyntä on 20 300 tuotetta kuukaudessa. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, kun sen hintaa nostetaan 1.25 € (uusi hinta 13.50 €) ja tuotteen kysynnän hintajousto on -1.75?

a) y:n suhteellisen muutoksen suhde
x:n suhteelliseen muutokseen

$$\text{jousto} = \frac{\Delta y / y \cdot 100\%}{\Delta x / x \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

b) $\left.\begin{aligned} p &= 12{,}25\,€ \\ q &= 20\,300\ \text{kpl/kk} \\ \Delta q &= x \\ \Delta p &= 1{,}25\,€ \\ \eta &= -1{,}75 \end{aligned}\right\}$ $\quad \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \eta$

$$\frac{x}{1{,}25\,€} \cdot \frac{12{,}25\,€}{20\,300\,\frac{\text{kpl}}{\text{kk}}} = -1{,}75$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1{,}75 \cdot 1{,}25\,\cancel{€} \cdot 20\,300\,\frac{\text{kpl}}{\text{kk}}}{12{,}25\,\cancel{€}}$$

$$\Leftrightarrow x = -3625$$

Vastaus: <u>kysyntä vähenee 3625 kpl/kk (~18 %)</u>
(uusi kysyntä 16 675 kpl/kk)

5. a) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 5.125%?

b) Laske tasaerälainen annuiteetti, kun lainan määrä on 8 000 € . Laina-aika on 15 kuukautta, lainaa hoidetaan kuukausittain ja todellinen vuosikorko on 12.25%.

c) Kuvaile lyhyesti neljä investoinnin kannattavuuden mittaria.

a) $(1+i)^{12} = 1{,}05125 \rightarrow i = 1{,}05125^{\frac{1}{12}} - 1$

$= 0{,}00417368$

b) $(1+i)^{12} = 1{,}1225 \rightarrow 1+i = 1{,}1225^{1/12}$

$i = [1{,}1225^{1/12} - 1]$

$$k = cH = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot H$$

$$= \frac{[1{,}1225^{\frac{1}{12}} - 1]\, 1{,}1225^{15/12}}{(1{,}1225^{15/12} - 1)} \cdot 8000€ = 575{,}55\,€$$

c) Nettonykyarvo NPV on kassavirtaerien nykyhetkeen diskontattujen arvojen summa

$$NPV = \sum_{j=0}^{N} \frac{k_j}{(1+i)^j}.$$

jos $NPV > 0$, niin projekti on kannattava käytetyllä laskentakorolla.

Suhteellinen nykyarvo SNA $= \frac{NPV(\text{tulovirt.})}{NPV(\text{menovirt.})}$

jos $SNA > 1$ projekti on kannattava

Sisäinen korkokanta i_{sis} = se laskentakorko, jolla $NPV = 0$. Ei ehkä ole olemassa, jos kassavirta vaihtaa suuntaa kaksi kertaa. Kuvaa hyvin ja konkreettisella tavalla projektin kykyä tuottaa TUOTTOA pääomalle. $i_{sis} > i \rightarrow$ ok

ROI = pääoman tuottoaste $\approx \frac{K}{H}$. Pitkän projektin tapauksessa $\approx$ sama kuin i_{sis}. Lyhyen projektin tapauksessa liioittelee ($ROI > i_{sis}$)

$ROI > i \rightarrow$ projekti kannattava.

Takaisinmaksuaika $n^* < N \rightarrow$ ok