

Avoim yläopisto, kevät 2009

Talousmatematiikan perusteet

Esimerkkejä 28.1.2009

1. Erään kappaletavaratuotteen varastointikustannukset ovat 1 € kappaletta ja vuotta kohti. Tilauskustannukset ovat 80 € tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 4000 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat viiveettä ja hetkellisesti, varastointitila on rajoittamaton. Mikäli tuotteesta ilmenee puutetta, syntyy puutekustannuksia 5 € kappaletta ja vuotta kohti.

- a) Tarkastellaan aluksi varastopolitiikkaa, jossa puutetta ei sallita. Miten suuri on tällöin optimaalinen tilauserän koko ja suuretko tähän politiikkaan liittyvät optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?
- b) Tarkastellaan toiseksi varastopolitiikkaa, jossa myös puute sallitaan. Mikä on nyt optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?
- c) Tarkastellaan vielä lähemmin a)- ja b)-kohtiin liittyviä optimaalisia kokonaiskustannuksia. Esitä kummassakin tapauksessa, miten ne koostuvat seuraavista kolmesta erästä: tilauskustannukset, varastointikustannukset, puutekustannukset.

2. Erään kappaletavaratuotteen varastointikustannukset ovat 10 snt kappaletta ja kuukautta kohti. Tilauskustannukset ovat 40 € tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 300 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat viiveettä ja hetkellisesti, varastointitila on rajoittamaton.

- a) Tarkastellaan aluksi varastopolitiikkaa, jossa puutetta ei sallita. Miten suuri on tällöin optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat tähän politiikkaan liittyvät optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?
- b) Tarkastellaan toiseksi tilannetta, jossa varastopolitiikka on kuten a)-kohdassa (puutetta ei sallita), mutta täydennystoimitusten oletetaan tulevan omasta tuotannosta (täydennystoimitusten kapasiteetti 1500 kpl kuukaudessa). Oman tuotannon palkka- ja raaka-aine -menot ovat yhteensä 0.2 € /tuote. Mikä on optimaalinen eräkoko nyt ja miten suuret ovat optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?

3. Suurpesula tarvitsee 30 000 astiaa tiettyä pesuainetta vuodessa. Pesuaineen ostohinta on 5 € astialta ja vuotuisten varastointikustannusten arvioidaan olevan 10% varaston arvosta. Tilauskustannukset ovat 75 € tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään?

4. Suurpesula tarvitsee 7 500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Pesuaineen ostohinta on 0,5 € astialta ja varastointikustannusten arvioidaan olevan 1,0 € /astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 50 € tilaukselta.

a) Määritä optimaalinen tilauserän koko.

b) Soap Oy valmistaa pesuaineen suuressa sekoituskattilassa. Kerralla sekoitetaan yhden tilauksen mukainen määrä pesuainetta (q astiaa, max 7000 astiaa). Yhdestä sekoituspanoksesta aiheutuva kustannus (€) on $FC + VC = 200 + 0,4q$, joten kate (€) per sekoituspanos on $pq - VC - FC = 0,1q - 200$. Soap Oy tarjoaa suurpesulalle $p\%$:n määräalennuksen pesuaineen ostohintaan, jos tilauserä on vähintään 7000 astiaa. Miten suuri määräalennuksen tulee vähintään olla, jotta suurpesula kasvattaa tilauseränsä 7000 astiaan? (Ohje: $p/100 \cdot 0,5 \text{ €} \cdot D \geq TC(7000) - TC(q_0)$)

c) Suurpesula ostaa Soap Oy:n. Miten suuri on optimaalinen tilauserä yritystoston jälkeen?

KAAVOJA Varastomalleista

perusmalli $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli $q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$
 $TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$

tuotantomalli $q_2 = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}},$
 $TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}$

1. Erään kappaletavaratuotteen varastointikustannukset ovat 1 € kappaletta ja vuotta kohti. Tilauskustannukset ovat 80 € tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 4000 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat viiveettä ja hetkellisesti, varastointitila on rajoittamaton. Mikäli tuotteesta ilmenee puutetta, syntyy puutekustannuksia 5 € kappaletta ja vuotta kohti.

- a) Tarkastellaan aluksi varastopolitiikkaa, jossa puutetta ei sallita. Miten suuri on tällöin optimaalinen tilauserän koko ja suuretko tähän politiikkaan liittyvät optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?

$$h = 1 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}, \quad K = 80 \text{ €}, \quad D = 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ €} \cdot 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}}{1 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{v}}}} = \underline{\underline{800 \text{ kpl}}}$$

$$\begin{aligned} TC &= \underbrace{\frac{KD}{q}}_{\text{tilaus}} + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot q}_{\text{varasto}} = \frac{80 \text{ €} \cdot 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}}{800 \text{ kpl}} + \frac{1 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{v}}}{2} \cdot 800 \text{ kpl} \\ &= 400 \frac{\text{€}}{\text{v}} + 400 \frac{\text{€}}{\text{v}} = \underline{\underline{800 \frac{\text{€}}{\text{v}}}} \end{aligned}$$

- b) Tarkastellaan toiseksi varastopoliittikkaa, jossa myös puute sallitaan. Mikä on nyt optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?

$$h = 1 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{v}}, K = 80 \text{ €}, D = 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}, s = 5 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{v}}$$

$$\text{Kannet} \quad q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}$$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

$$\text{Nyt} \quad q_1 = 800 \text{ kpl} \sqrt{\frac{1+5}{5}} \sim 876 \text{ kpl}$$

$$M_1 = 800 \text{ kpl} \sqrt{\frac{5}{1+5}} \sim 730 \text{ kpl}$$

$$TC_1(q_1) = \left(\frac{80 \cdot 4000}{876} + \frac{730^2 \cdot 1}{2 \cdot 876} + \frac{(876-730)^2 \cdot 5}{2 \cdot 876} \right) \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$= \underbrace{365,30 \frac{\text{€}}{\text{v}}}_{\text{tilaus}} + \underbrace{304,17 \frac{\text{€}}{\text{v}}}_{\text{ylläpito}} + \underbrace{60,83 \frac{\text{€}}{\text{v}}}_{\text{puute}} = \underline{\underline{730,30 \frac{\text{€}}{\text{v}}}}$$

- c) Tarkastellaan vielä lähemmin a)- ja b)-kohtiin liittyviä optimaalisia kokonaiskustannuksia. Esitä kummassakin tapauksessa, miten ne koostuvat seuraavista kolmesta erästä: tilauskustannukset, varastointikustannukset, puutekustannukset.

	tilaus	varastointi	puute	Σ
a)	$400 \frac{\text{€}}{\text{v}}$	$400 \frac{\text{€}}{\text{v}}$	$0 \frac{\text{€}}{\text{v}}$	$= 800 \frac{\text{€}}{\text{v}}$
b)	$365,30 \frac{\text{€}}{\text{v}}$	$304,17 \frac{\text{€}}{\text{v}}$	$60,83 \frac{\text{€}}{\text{v}}$	$= 730,30 \frac{\text{€}}{\text{v}}$

2. Erään kappale-tavaratuotteen varastointikustannukset ovat 10 snt kappaletta ja kuukautta kohti. Tilauskustannukset ovat 40 € tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 300 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat viiveettä ja hetkellisesti, varastointitila on rajoittamaton.

a) Tarkastellaan aluksi varastopolitiikkaa, jossa puutetta ei sallita. Miten suuri on tällöin optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat tähän politiikkaan liittyvät optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?

$$h = \frac{0,10 \text{ €}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} = 1,2 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{v}}$$

$$K = 40 \text{ €}$$

$$D = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 300}{1,2}} \text{ kpl} \approx \underline{\underline{141 \text{ kpl}}}$$

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + \frac{h}{2} q_0 = \left(\frac{40 \cdot 300}{141} + \frac{1,2}{2} \cdot 141 \right) \frac{\text{€}}{\text{v}} \\ = 85,11 \frac{\text{€}}{\text{v}} + 84,60 \frac{\text{€}}{\text{v}} = \underline{\underline{169,71 \frac{\text{€}}{\text{v}}}}$$

$$(TC_0 = \sqrt{2KDH} = \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 1,2} = 169,706 \frac{\text{€}}{\text{v}})$$

b) Tarkastellaan toiseksi tilannetta, jossa varastopolitiikka on kuten a-kohdassa (puutetta ei sallita), mutta täydennystoimitusten oletetaan tulevan omasta tuotannosta (täydennystoimitusten kapasiteetti 1500 kpl kuukaudessa). Oman tuotannon palkka- ja raaka-aine -menot ovat yhteensä 0,2 € /tuote. Mikä on optimaalinen eräkkö nyt ja miten suuret ovat optimaaliset varastonpidon kokonaiskustannukset?

$$r = 1500 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 18000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}$$

$$q_2 = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 300}{1,2}} \sqrt{\frac{18000}{18000-300}} \approx \underline{\underline{143 \text{ kpl}}}$$

$$TC_2 = \frac{KD}{q_2} + \frac{h q_2 (r-D)}{2r}$$

$$= \left(\frac{40 \cdot 300}{143} + \frac{1,2 \cdot 143 \cdot (18000 - 300)}{2 \cdot 18000} \right) \frac{\text{€}}{\text{v}} = 83,92 \frac{\text{€}}{\text{v}} + 84,37 \frac{\text{€}}{\text{v}} \\ = \underline{\underline{168,29 \frac{\text{€}}{\text{v}}}}$$

3. Suurpesula tarvitsee 30 000 astiaa tiettyä pesuainetta vuodessa. Pesuaineen ostohinta on 5 € astialta ja vuotuisten varastointikustannusten arvioidaan olevan 10% varaston arvosta. Tilauskustannukset ovat 75 € tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään?

Jos varastossa on kysymään N astiaa,
 niin varaston arvo on kysymään $N \cdot 5 \frac{\text{€}}{\text{astia}}$
 $h \cdot N \cdot 1v = \frac{10}{100} \cdot N \cdot 5 \frac{\text{€}}{\text{astia}}$

$$\Rightarrow h = 0,5 \frac{\text{€}}{\text{astia} \cdot v}$$

$$K = 75 \text{ €}$$

$$D = 30\,000 \text{ astiaa}/v$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75 \text{ €} \cdot 30\,000 \frac{\text{ast}}{v}}{0,5 \frac{\text{€}}{\text{astia} \cdot v}}} = 3000 \text{ astiaa}$$

$$TC(q_0) = \frac{KD}{q_0} + \frac{h}{2} \cdot q_0 = \left(\frac{75 \cdot 30\,000}{3000} + \frac{0,5}{2} \cdot 3000 \right) \frac{\text{€}}{v}$$

$$= (750 + 750) \frac{\text{€}}{v} = 1500 \frac{\text{€}}{v}$$

$$TC(5000) = \frac{KD}{5000 \text{ ast}} + \frac{h}{2} \cdot 5000 \text{ ast} = \left(\frac{75 \cdot 30\,000}{5000} + \frac{0,5}{2} \cdot 5000 \right) \frac{\text{€}}{v}$$

$$= (450 + 1250) \frac{\text{€}}{v} = 1700 \frac{\text{€}}{v}$$

V: Jos pesula toimii optimaalisesti,
 se tilaa pesuainetta 3000 astian erissä
 (10 tilausta vuodessa).
 Säästö on $200 \frac{\text{€}}{v}$ (eli 11,8% nykyisistä kust.)

4. Suurpesula tarvitsee 7500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Pesuaineen ostohinta on 0,5 € astialta ja varastointikustannusten arvioidaan olevan 1,0 € /astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 50 € tilaukselta.

a) Määritä optimaalinen tilauserän koko.

$$D = 7500 \frac{\text{ast}}{\text{kk}} = 90\,000 \frac{\text{ast}}{\text{v}}$$

$$h = 1,0 \frac{\text{€}}{\text{ast} \cdot \text{v}}$$

$$K = 50 \text{ €}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 90\,000}{1}} \text{ ast} = 3000 \text{ astiaa}$$

b) Soap Oy valmistaa pesuaineen suuressa sekoituskattilassa. Kerralla sekoitetaan yhden tilauksen mukainen määrä pesuainetta (q astiaa, max 7000 astiaa). Yhdestä sekoituspanoksesta aiheutuva kustannus (€) on $FC + VC = 200 + 0,4q$, joten kate (€) per sekoituspanos on $pq - VC - FC = 0,1q - 200$. Soap Oy tarjoaa suurpesulalle $p\%$:n määräalennuksen pesuaineen ostohintaan, jos tilauserä on vähintään 7000 astiaa. Miten suuri määräalennuksen tulee vähintään olla, jotta suurpesula kasvattaa tilauseränsä 7000 astiaan? (Ohje: $p/100 \cdot 0,5 \text{ €} \cdot D \geq TC(7000) - TC(q_0)$)

Hinta väärälle tilaukselle

$$TC(7000) = \frac{KD}{7000} + \frac{h}{2} \cdot 7000 = \frac{50 \cdot 90\,000}{7000} + \frac{1}{2} \cdot 7000 = 4142,86 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$TC(3000) = \frac{KD}{3000} + \frac{h}{2} \cdot 3000 = \frac{50 \cdot 90\,000}{3000} + \frac{1}{2} \cdot 3000 = 3000,00 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$\text{ero} = 1142,86 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

Alennus sisäänostossa $\frac{p}{100} \cdot 0,5 \frac{\text{€}}{\text{ast} \cdot \text{v}} \cdot D$

↑
!!!

Tilauserä suurennetaan, jos

$$\frac{p}{100} \cdot 0,5 \frac{\text{€}}{\text{ast} \cdot \text{v}} \cdot 90\,000 \frac{\text{ast}}{\text{v}} \geq 1142,86 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$p \geq \frac{1142,86 \cdot 100}{0,5 \cdot 90\,000} = 2,54$$

V: 2,54% määräalennus sisäänostossa riittää houkuttimeluv

4 jalkaa

Suurpesula tarvitsee 7500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Pesuaineen ostohinta on 0,5 €/astialta ja varastointikustannusten arvioidaan olevan 1,0 €/astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 50 € tilaukselta.

a) Määritä optimaalinen tilauserän koko.

b) Soap Oy valmistaa pesuaineen suuressa sekoituskattilassa. Kerralla sekoitetaan yhden tilauksen mukainen määrä pesuainetta (q astiaa, max 7000 astiaa). Yhdestä sekoituspanoksesta aiheutuva kustannus (€) on $FC + VC = 200 + 0,4q$, joten kate (€) per sekoituspanos on $pq - VC - FC = 0,1q - 200$. Soap Oy tarjoaa suurpesulalle $p\%$:n määräalennuksen pesuaineen ostohintaan, jos tilauserä on vähintään 7000 astiaa. Miten suuri määräalennuksen tulee vähintään olla, jotta suurpesula kasvattaa tilauseränsä 7000 astiaan? (Ohje: $p/100 \cdot 0,5 \text{ €} \cdot D \geq TC(7000) - TC(q_0)$)

c) Suurpesula ostaa Soap Oy:n. Miten suuri on optimaalinen tilauserä yrittösten jälkeen?

Kaikki kustannukset vuoden ajalta

$$\frac{KD}{q} + \frac{hq}{2} + (200 + 0,4q) \cdot \frac{D}{q}$$

tilaukset varastointi valmistus

$$\frac{(K+200)D}{q} + \frac{hq}{2} + \underbrace{0,4D}_{\text{vakio}}$$

$\frac{d}{dq} 0,4D = 0$

$$q_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2(50+200) \cdot 90000}{1,0}} = 6708 \text{ astiaa}$$

	tilaus KD/q	varastot $hq/2$	valmistus $(200 + 0,4q)D/q$	Σ
Ennen oston	$\frac{50 \cdot 90000}{3000} + \frac{1 \cdot 3000}{2}$ $= 1500 + 1500$	$\frac{(200 + 0,4 \cdot 3000) \cdot 90000}{3000}$ 42000		(45000)
oston jälkeen	$\frac{50 \cdot 90000}{6708} + \frac{1 \cdot 6708}{2} + \frac{(200 + 0,4 \cdot 6708) \cdot 90000}{6708}$ $= 670,84 + 3354,00 + 38683,36$			$= 42708$