

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, (ke 21.9.2011)

1. Ratkaise yhtälöt

- a) $2x + 2 = 7x + 8$ b) $6(x + 2) = 5x + 10$ c) $3x + 1 = 3(x + 1)$

$$\begin{aligned} a) \quad & 2x + 2 = 7x + 8 \\ \Leftrightarrow & 2x - 7x = 8 - 2 \\ \Leftrightarrow & -5x = 6 \quad | :(-5) \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -\frac{6}{5} \approx -1,2$

$$\begin{aligned} b) \quad & 6(x + 2) = 5x + 10 \\ \Leftrightarrow & 6x + 12 = 5x + 10 \\ \Leftrightarrow & 6x - 5x = 10 - 12 \\ \Leftrightarrow & x = 2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$

$$\begin{aligned} c) \quad & 3x + 1 = 3(x + 1) \\ \Leftrightarrow & 3x + 1 = 3x + 3 \\ \Leftrightarrow & 3x - 3x = 3 - 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = 2 \quad \checkmark \rightarrow \end{aligned}$$

Vastaus: yhtälö on aina epätosi
(se ei ole totta millään x :n arvolla)
{ epätosi $\forall x$ }
{ $R_i = \emptyset$ }

2. Ratkaise yhtälöt

- a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4$ c) $(x + 1)(x - 3) = (x + 1)$

$$\begin{aligned} a) \quad & 2x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x = & \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \\ x = & -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \\ \Leftrightarrow & x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & (x + 1)(x - 3) = (x + 1) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 3x + x - 3 = x + 1 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ \Leftrightarrow & x = 4 \quad \text{tai} \quad x = -1 \end{aligned}$$

3. Ratkaise yhtälöt

a) $2^x = 3$ b) $\ln(x-1) = 100$ c) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$

a) $2^x = 3$ | \ln
 $\ln(2^x) = \ln 3$
 $x \ln 2 = \ln 3$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \underline{\underline{1,585}}$$

b) $\ln(x-1) = 100$ | \exp
 $x-1 = e^{100}$
 $x = e^{100} + 1$
 $x = \underline{\underline{2,69 \cdot 10^{43}}}$

c) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$ | $\cdot (x-1)$ Huom $x \neq 1$ ▽

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 3(x-1) \\ 2x+1 &= 3x-3 \\ 2x-3x &= -3-1 \\ -x &= -4 \\ \underline{\underline{x &= 4}} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $x = 1,585$
 b) $x = 2,69 \cdot 10^{43}$
 c) $x = 4$

4. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x-1 \leq 3x+1$ b) $3(x+1) \geq 5(x-1)$

a) $x-1 \leq 3x+1$
 $x-3x \leq 1+1$
 $-2x \leq 2$ | $:(-2)$
 $\underline{\underline{x \geq -1}}$

b) $3(x+1) \geq 5(x-1)$
 $3x+3 \geq 5x-5$
 $3x-5x \geq -5-3$
 $-2x \geq -8$ | $:(-2)$
 $\underline{\underline{x \leq 4}}$

Vastaus: a) $x \geq -1$
 b) $x \leq 4$

5. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25.20 € ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18.10 € (per tuote). Myyntitulo on $256 \cdot 25.20 \text{ €} = 6451.20 \text{ €}$, valmistuskustannus on $256 \cdot 18,10 \text{ €} = 4633.60 \text{ €}$. Kate on myyntitulo - valmistuskustannus = $6451.20 \text{ €} - 4633.60 \text{ €} = 1817,60$. Kate on siis 28.17% myynnistä.

3/11
ep/ky

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 5,0%.

- Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- Laske helmikuun kate (euroina).
- Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

Saviraavana indeksi: 1 viikko tammikuun
indeksi: 2 viikko helmikuun ja käytännön
muuttajia

$$n = \text{valmistettujen tuotteiden määrä (kpl/kk)}$$

$$p = \text{hinta (€ / kpl)}$$

$$c = \text{valmistuskustannus (€ / kpl)}$$

$$R = n \cdot p = \text{myyntitulo (€ / kk)}$$

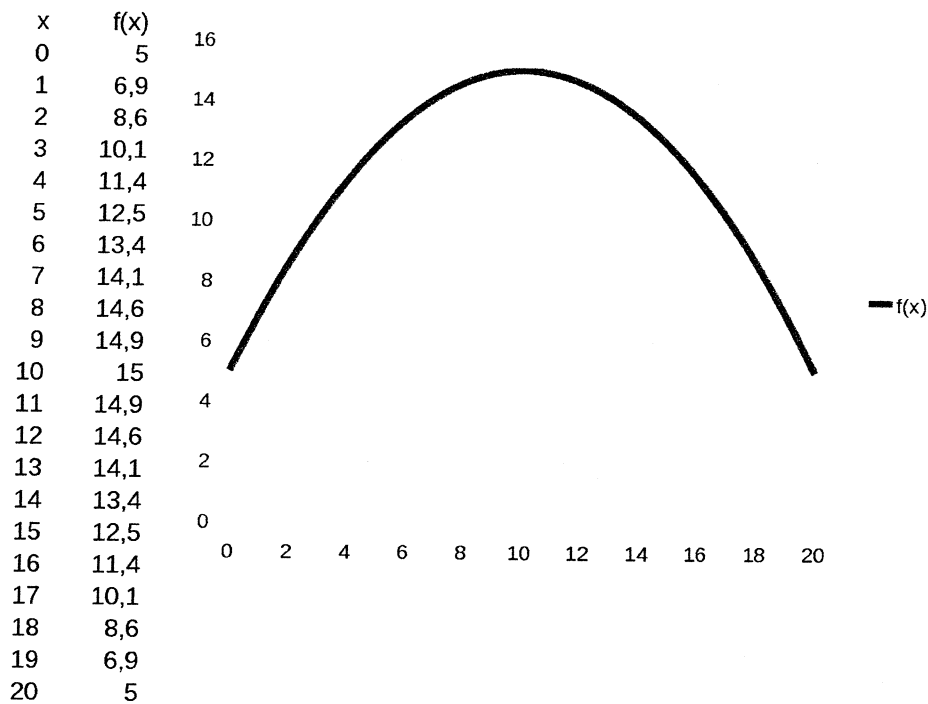
$$TC = n \cdot c = \text{kok. kustannus (€ / kk)}$$

$$K = R - TC = \text{kate (€ / kk)}$$

$$k_p = \frac{K}{R} \cdot 100\% = \text{kateprosentti (\%)}$$

- $R_2 = n_2 p_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \text{ € / kpl} = \underline{\underline{7560 \text{ € / kk}}}$
- $TC_2 = n_2 c_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot (1,05 \cdot 18,10 \text{ € / kpl}) = \underline{\underline{5701,50 \text{ € / kk}}}$
- $K_2 = R_2 - TC_2 = (7560 - 5701,50) \text{ € / kk} = \underline{\underline{1858,50 \text{ € / kk}}}$
- $k_{p2} = \frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% = \frac{1858,50}{7560,00} \cdot 100\% = \underline{\underline{24,58\%}}$
- $\frac{R_2 - R_1}{R_1} \cdot 100\% = \frac{7560 - 6451,20}{6451,20} \cdot 100\% = \underline{\underline{17,2\%}}$
- $\frac{TC_2 - TC_1}{TC_1} \cdot 100\% = \frac{5701,50 - 4633,60}{4633,60} \cdot 100\% = \underline{\underline{23,0\%}}$
- $\frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{1858,50 - 1817}{1817} \cdot 100\% = \underline{\underline{+2,3\%}}$
- $k_{p2} - k_{p1} = 24,58\% - 28,17\% = \underline{\underline{-3,6\% \text{ yksikköä}}}$

6. Piirrä funktion $f(x) = 5 + 2x - 0.1x^2$ kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille $0 \leq x \leq 20$.)



funktio on kasvava välillä $0 \leq x \leq 10$
 funktio on vähenevä välillä $10 \leq x \leq 20$

7) Piirrä välillä $0 \leq x \leq 5$ kuvaajat funktioille

7/41

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 4x - 6$$

x	$f(x) = x^2 - x$	x	$g(x) = 4x - 6$
0.0		0.0	
0.5		1.0	
1.0		2.0	
2.0		3.0	
3.0		4.0	

a) $f(x) = x^2 - x$

- jatkava
- polynomifunktio
- ylöspäin aukeava paraabeli
- nollakohdat

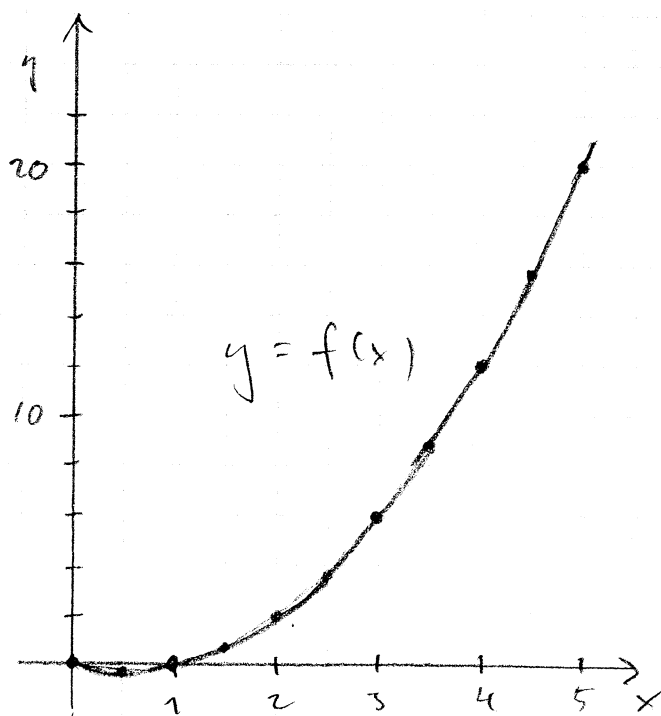
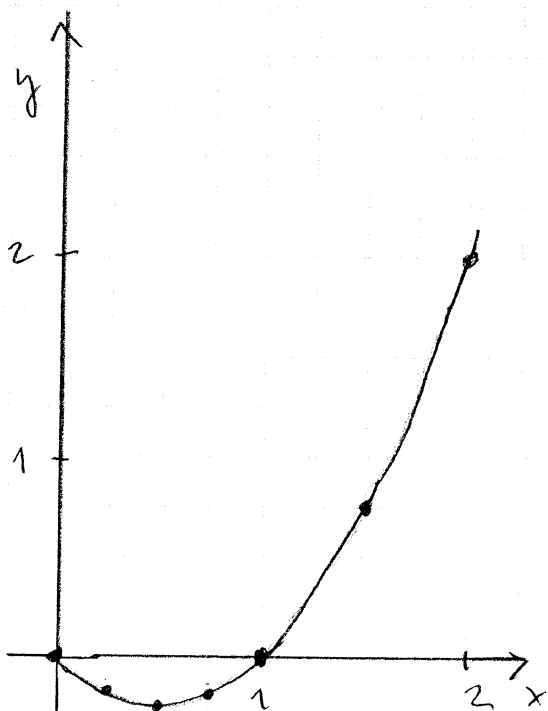
$$f(x) = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$

x	$f(x) = x^2 - x$
0	$0^2 - 0 = 0$
0,25	$0,25^2 - 0,25 = -0,1875$
0,5	$0,5^2 - 0,5 = -0,25$
1,0	$1^2 - 1 = 0$
1,5	$1,5^2 - 1,5 = 0,75$
2	$2^2 - 2 = 2$
2,5	$2,5^2 - 2,5 = 3,75$
3	$3^2 - 3 = 6$
3,5	$3,5^2 - 3,5 = 8,75$
4	$4^2 - 4 = 12$
4,5	$4,5^2 - 4,5 = 15,75$
5	$5^2 - 5 = 20$
0,75	$0,75^2 - 0,75 = -0,1875$



$$b) g(x) = 4x - 6$$

- jatkuvaa
- kuvaaja on suora
- kulma kerroin $k=4$
- nollakohta

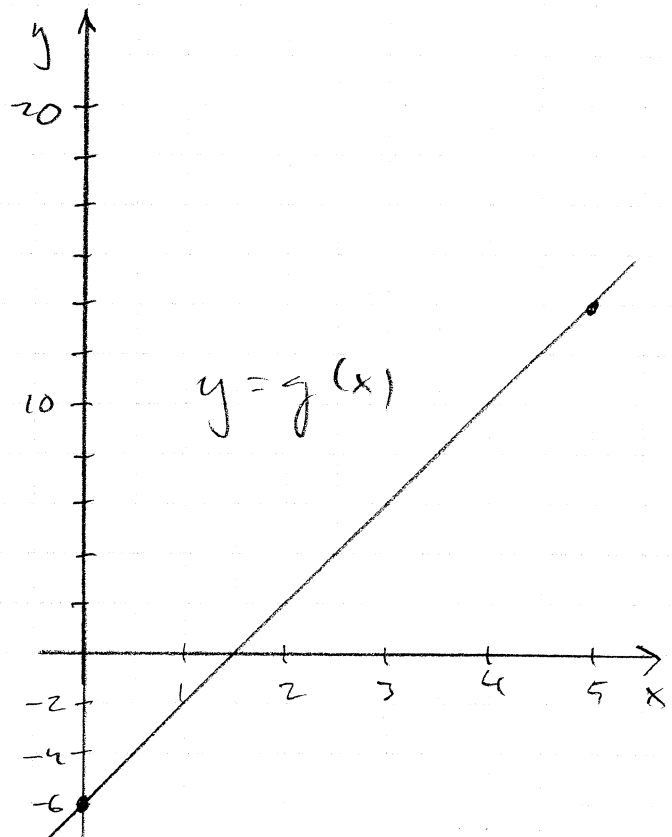
$$g(x) = 0$$

$$4x - 6 = 0$$

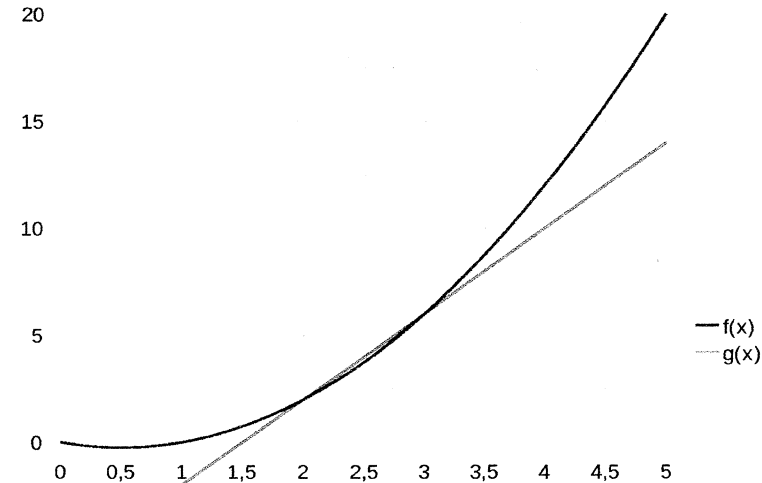
$$4x = 6$$

$$x = 1,5$$

x	$g(x) = 4x - 6$
0	$4 \cdot 0 - 6 = -6$
5	$4 \cdot 5 - 6 = 14$



x	f(x)	g(x)
0	0	-6
0,2	-0,16	-5,2
0,4	-0,24	-4,4
0,6	-0,24	-3,6
0,8	-0,16	-2,8
1	0	-2
1,2	0,24	-1,2
1,4	0,56	-0,4
1,6	0,96	0,4
1,8	1,44	1,2
2	2	2
2,2	2,64	2,8
2,4	3,36	3,6
2,6	4,16	4,4
2,8	5,04	5,2
3	6	6
3,2	7,04	6,8
3,4	8,16	7,6
3,6	9,36	8,4
3,8	10,64	9,2
4	12	10
4,2	12,44	10,8



8. Ovatko tehtävän 1 funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ kasvavia välillä $0 \leq x \leq 5$?

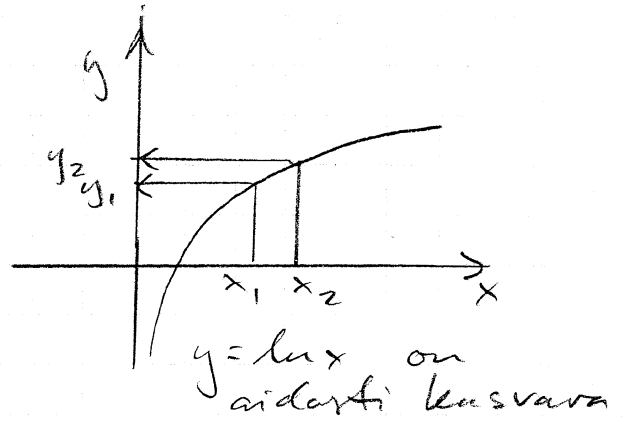
$g(x)$ on kasvava, mutta $f(x)$ ei ole kasvava

9. Ratkaise

9/101

a) $1.05^x = 1.50$ b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3$

$$\begin{aligned} \text{a) } & 1,05^x = 1,50 \quad | \ln \\ \Leftrightarrow & x \ln 1,05 = \ln 1,50 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{\ln 1,50}{\ln 1,05} \\ \Leftrightarrow & x = 8,31 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } & (1,05)^x \geq (1,15)^3 \quad | \ln \\ \Leftrightarrow & x \ln 1,05 \geq 3 \ln 1,15 \\ \Leftrightarrow & x \geq \frac{3 \ln 1,15}{\ln 1,05} \\ \Leftrightarrow & x \geq 8,59 \end{aligned}$$

10

Yritys haluaa lisätä valmistamansa tuotteen myyntiä. Tätä varten yritys joutuu laskemaan tuotteensa myyntihintaa. Markkinointiosasto selvitti kysyntää ja arvelee, että yritys saa myytävä q tuotetta (viikossa), jos tuotteen myyntihinta on $p = 20 - 0.25q$ (euroa). Mikä pitää myyntihinnan olla, jos yritys haluaa, että myynnistä kertyy viikossa vähintään 375 euroa?

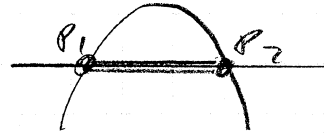
$$\begin{aligned}
 \text{Myyntitulo} &\geq 375 \\
 \Leftrightarrow p \cdot q &\geq 375 \\
 \Leftrightarrow p(80 - 4p) &\geq 375 \\
 \Leftrightarrow -4p^2 + 80p - 375 &\geq 0 \\
 &= f(p)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{7,50 \leq p \leq 12,50}$$

Vastaus:
Hinnan tulee olla vähintään 7,50 €/kpl ja enintään 12,50 €/kpl

$$\begin{aligned}
 (*) \quad p &= 20 - 0,25q \\
 0,25q &= 20 - p \quad | \cdot 4 \\
 q &= 80 - 4p
 \end{aligned}$$

(***) $f(p)$:in kuvaaja alasp. avoinna paraabeli



nollakohdat

$$\begin{aligned}
 f(p) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -4p^2 + 80p - 375 &= 0 \\
 \Leftrightarrow p &= \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-375)}}{2 \cdot (-4)} \\
 &= \frac{-80 \pm 20}{-8}
 \end{aligned}$$

$$p_1 = 7,50 \quad p_2 = 12,50$$