

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

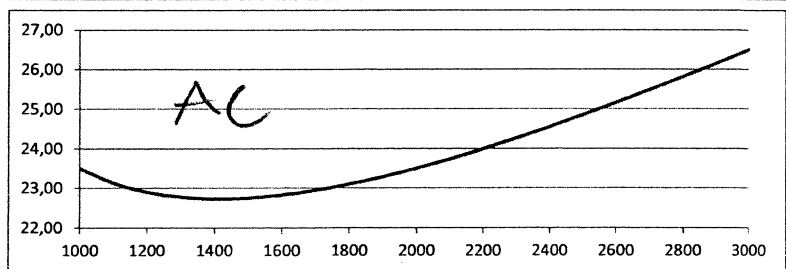
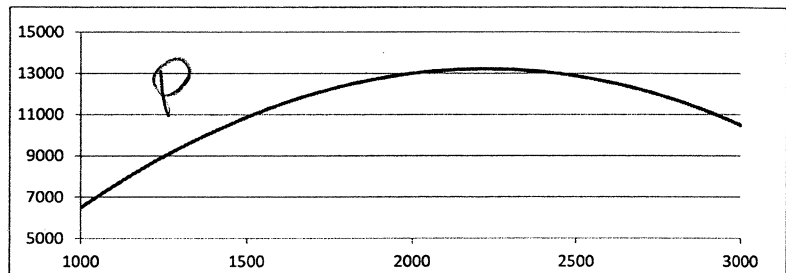
2. harjoitus, (ma 3.26.2011)

1. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 10 € , joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 10q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 9000$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.0045q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 9000 + 10q + 0.0045q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30 € , joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 20q - 0.0045q^2 - 9000$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $1000 < q < 3000$. Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

$$P(q) = 20q - 0,0045q^2 - 9000$$

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{9000 + 10q + 0,0045q^2}{q} = \frac{9000}{q} + 10 + 0,0045q$$

q	TR	TC	P	AC
1000	30000	23500	6500	23,50
1100	33000	25445	7555	23,13
1200	36000	27480	8520	22,90
1300	39000	29605	9395	22,77
1400	42000	31820	10180	22,73
1500	45000	34125	10875	22,75
1600	48000	36520	11480	22,83
1700	51000	39005	11995	22,94
1800	54000	41580	12420	23,10
1900	57000	44245	12755	23,29
2000	60000	47000	13000	23,50
2100	63000	49845	13155	23,74
2200	66000	52780	13220	23,99
2300	69000	55805	13195	24,26
2400	72000	58920	13080	24,55
2500	75000	62125	12875	24,85
2600	78000	65420	12580	25,16
2700	81000	68805	12195	25,48
2800	84000	72280	11720	25,81
2900	87000	75845	11155	26,15
3000	90000	79500	10500	26,50



$V =$ järkevä tuotannon määrä $n. 2200 \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$

2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}$$

Millä q :n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q :n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

$$P(q) = 20q - 0,0045q^2 - 9000$$

$$P'(q) = 20 - 0,009q$$

$$\begin{aligned} P'(q) = 0 &\Leftrightarrow 20 - 0,009q = 0 \\ &\Leftrightarrow 20 = 0,009q \quad | : 0,009 \\ &\Leftrightarrow \frac{20}{0,009} = q \\ &\Leftrightarrow q = 2222 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(q) \geq 0 &\Leftrightarrow 20 - 0,009q \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 20 \geq 0,009q \quad | : 0,009 \\ &\Leftrightarrow \frac{20}{0,009} \geq q \\ &\Leftrightarrow q \leq 2222 \end{aligned}$$

Sis Voittofunktio on kasvava, kun $q \leq 2222$ (kurva on)

3. Laske derivaatat

a) $f'(x)$, kun $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$,

b) $g'(2)$, kun $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$,

c) $h'(x)$, kun $h(x) = 4x \cdot (x^2 - x)$

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$
 $f'(x) = 6x - 5$

b) $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$
 $g'(x) = 14x + 5$
 $g'(2) = 14 \cdot 2 + 5 = 33$

c) $h(x) = 4x(x^2 - x)$
 $h(x) = 4x^3 - 4x^2$
 $h'(x) = 12x^2 - 8x$ $= 4x(3x - 2)$

4. Erään tuotteen kustannusfunktio on $C(q) = 0.005q^2 + 6q + 200$. a) Määritä rajakustannus $MC(q) = C'(q)$, yksikkökustannus $AC(q) = C(q)/q$ ja kiinteät kustannukset. b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on $q = 150$?

$$C(q) = 0,005q^2 + 6q + 200$$

$$a) \quad MC(q) = C'(q) = \boxed{0,01q + 6}$$

$$AC(q) = \frac{C}{q} = \frac{0,005q^2 + 6q + 200}{q} = \underline{\underline{0,005q + 6 + \frac{200}{q}}}$$

$$\underline{\underline{FC = 200}}$$

$$b) \quad MC(150) = 0,01 \cdot 150 + 6 = \underline{7,50}$$

$$AC(150) = 0,005 \cdot 150 + 6 + \frac{200}{150} = \underline{8,08}$$

$$FC = \underline{200}$$

5. Edellisessä tehtävässä mainitun tuotteen kysyntäfunktio

$$p = f(q) = 10 - 0.01q$$

kertoo miten hinta (€/kpl) riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä (kpl/kk). Tuottofunktio

$$R(q) = qp = q \cdot f(q) = q(10 - 0.01q) = 10q - 0.01q^2$$

Kertoo tuoton (myynnistä saatu kassatulo). Laske rajatuotto

$$MR(q) = R'(q)$$

$$R(q) = 10q - 0,01q^2$$

$$MR(q) = R'(q) = \underline{\underline{10 - 0,02q}}$$

6. Tehtävien 4 ja 5 yritys tuottaa nyt kaksisataa tuotetta kuussa ($q = 200$). Laske rajakustannus $MC(200)$ ja rajatuotto $MR(200)$. Kannattaako yrityksen kasvattaa vai pienentää tuotantoaan? (Jos $MC > MR$, niin tuotantoa kannattaa pienentää, ja jos $MC < MR$, niin tuotantoa kannattaa kasvattaa.)

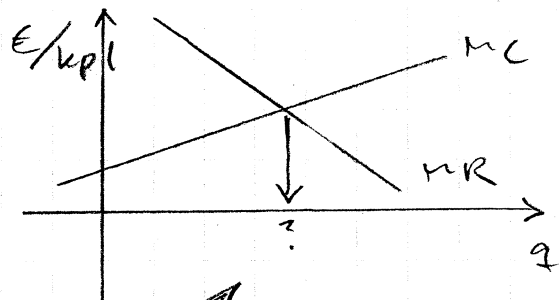
$$MC(200) = 0,01 \cdot 200 + 6 = 8$$

$$MR(200) = 10 - 0,02 \cdot 200 = 6$$

$MC > MR \rightarrow$ tuotantoa kannattaa pienentää

Kommentti

$MC(q) = 0,01q + 6$ on kasvava
 $MR(q) = 10 - 0,02q$ on vähenevä



$$MC = MR$$

$$0,01q + 6 = 10 - 0,02q$$

$$\Leftrightarrow 0,03q = 4$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{4}{0,03} = \underline{133,3}$$

7. Kun tehtävän 5 yritys tuottaa 100 tuotetta kuukaudessa, tuotto on $R(100) = 900$ (€/kk). Kun yritys tuottaa 150 tuotetta kuukaudessa, tuotto on $R(150) = 1275$ (€/kk).
- a) Laske lineaarisen interpoloinnin keinoin arvio tuotosta, kun tuotannon määrä on $q = 110$.
- b) Tee vastaava arvio, kun $q = 250$.
- c) Miten suurina olivat arvioiden suhteelliset virheet a-kohdassa ja b-kohdassa? Mikä yleinen sääntö liittyy 'interpolointiin' ja 'ekstrapolointiin' tulee tässä esiin?

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) (f(x_1) - f(x_0))$$

$$\begin{aligned} \text{a) } R(110) &= R(100) + \left(\frac{110 - 100}{150 - 100} \right) (R(150) - R(100)) \\ &= 900 + \frac{10}{50} (1275 - 900) \\ &= \underline{\underline{975}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } R(250) &= R(100) + \left(\frac{250 - 100}{150 - 100} \right) (R(150) - R(100)) \\ &= 900 + \frac{150}{50} (1275 - 900) \\ &= \underline{\underline{2025}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} R(110) &= 10 \cdot 110 - 0,01 \cdot 110^2 \\ &= 979 \text{ €/kk} \end{aligned}$$

$$\text{virhe } \Delta R = 975 - 979 = -4 \text{ €/kk}$$

$$\text{suht. virhe} = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% = \frac{-4}{979} \cdot 100\% = \underline{\underline{-0,4\%}}$$

$$R(250) = 10 \cdot 250 - 0,01 \cdot 250^2 = 1875 \text{ €/kk}$$

$$\text{virhe } \Delta R = 2025 - 1875 = +150 \text{ €/kk}$$

$$\text{suht. virhe} = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% = \frac{150}{1875} \cdot 100\% = \underline{\underline{+8,0\%}}$$

Ekstrapoloinnissa virhe on isompi (yleensä)