

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

3. harjoitus, (ke 28.9.2011)

1. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

$$\begin{array}{l|l} p = 20 - 0,030q & \\ R = pq = (20 - 0,030q)q & C = 0,02q^2 + 5q + 150 \\ \quad = 20q - 0,030q^2 & \\ MR = R' = 20 - 0,06q & MC = 0,04q + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} MC = MR \\ 0,04q + 5 = 20 - 0,06q \\ 0,1q = 15 \\ \underline{q = 150} \quad \text{optimaalinen tuotanto} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(150) = R(150) - C(150) \\ = (20 \cdot 150 - 0,03 \cdot 150^2) - (0,02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150) \\ = 2325 - (450 + 750 + 150) \\ = \underline{975} \end{array}$$

2. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). On arvioitu, että hintaan 4.00 €/tuote saadaan myytyä 100 tuotetta viikossa ja hintaan 3.00 €/tuote saadaan myytyä 200 tuotetta viikossa. Käytetään seuraavassa laskelmasa lineaarista kysyntäfunktiota $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 €/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 €/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton? (voitto=myyntitulo - kustannukset)

$$\begin{array}{l|l} p = 5 - 0,01q & \\ R = 5q - 0,01q^2 & C = 1,5q + 230 \\ MR = 5 - 0,02q & MC = 1,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} MC = MR \\ 1,5 = 5 - 0,02q \\ 0,02q = 3,5 \quad | \cdot 50 \\ \underline{q = 175} \end{array}$$

3. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 2 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 €/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo - kustannukset)?

Tuotto on sama kuin ed. tehtävässä:

$$R = 5q - 0,01q^2$$

Kustannusfunktio

$$C(q) = \begin{cases} 1,5q + 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 1,5 \cdot 150 + 1,6(q - 150) + 250 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1,5q + 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 1,6q + 235 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

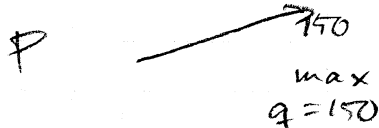
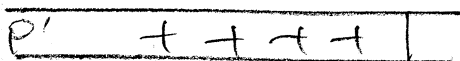
Voitto $P(q) = R(q) - C(q)$

$$= \begin{cases} -0,01q^2 + 3,5q - 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ -0,01q^2 + 3,4q - 235 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

kun $q \leq 150$

$$P'(q) = -0,02q + 3,5$$

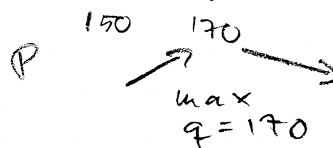
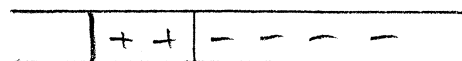
$$P'(q) = 0 \Leftrightarrow -0,02q + 3,5 = 0 \\ \Leftrightarrow q = 175$$



kun $q > 150$

$$P'(q) = -0,02q + 3,4$$

$$P'(q) = 0 \Leftrightarrow -0,02q + 3,4 = 0 \\ \Leftrightarrow q = 170$$



$$P(150) = -0,01 \cdot 150^2 + 3,5 \cdot 150 - 230 = 70 \leftarrow \text{parempi}$$

$$P(170) = -0,01 \cdot 170^2 + 3,4 \cdot 170 - 235 = 54$$

Vartaus optimi on $q = 150$

4. a) Olkoon kysyntäfunktio $p = 20 - 0.2q$

(1) Mikä on kysynnän hintajousto, kun $q = 20$?

(2) Mikä on kysynnän hintajousto, kun $q = 80$?

b) Mikä on kysynnän hintajousto, jos kysyntä riippuu hinnasta siten, että

$$q = a \cdot p^\eta.$$

c) Piirrä kysyntäfunktion graafi muodossa $p = f(q)$ (eli p on arvo kohdassa q), kun

$$q = 16 \cdot p^{-2}.$$

$$a) \quad p = 20 - 0,2q \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dq} = -0,2 \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dp} = \frac{1}{-0,2} = -5$$

$$\boxed{q=20} \rightarrow p = 20 - 0,2 \cdot 20 = 16$$

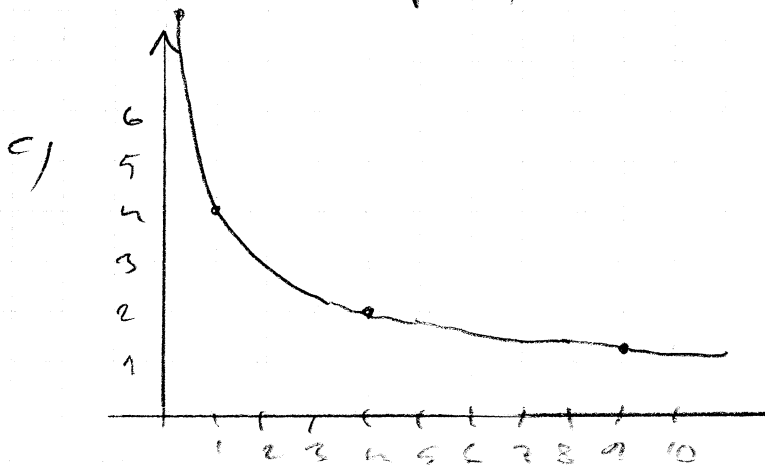
$$\text{tousto} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -5 \cdot \frac{16}{20} = \underline{\underline{-4}}$$

$$\boxed{q=80} \rightarrow p = 20 - 0,2 \cdot 80 = 4$$

$$\text{tousto} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -5 \cdot \frac{4}{80} = \underline{\underline{-0,25}}$$

$$b) \quad q = a \cdot p^\eta \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dp} = \eta \cdot a \cdot p^{\eta-1}$$

$$\text{tousto} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \eta \cdot a \cdot p^{\eta-1} \cdot \frac{p}{a p^\eta} = \underline{\underline{\eta}}$$



Kaavoja:

Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \eta$$

Rajatuotto ja kysynnän hintajousto:

$$MR = p \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)$$

$$q = \frac{16}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow p^2 = \frac{16}{q}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{4}{\sqrt{q}} = 4q^{-\frac{1}{2}}$$

Varfauus

a) kun $q=20$

tousto on -4

kun $q=80$

tousto on $-0,25$

b) tousto = η

5. Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -2.1 . Tuotteen hinta on nyt 20.50 €/kpl ja sen kysyntä on 150 kpl/kk .

- Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen yksikköhintaa alennetaan eurolla?
- Miten muuttuu myyntitulo $R = pq$, kun yksikköhintaa alennetaan eurolla?
- Kannattaako edellä kuvattu hinnan alentaminen eurolla, jos tuotteen valmistuskustannus on $C(q) = 300 + 12,00 \cdot q + 0,01 \cdot q^2$
- Voiko saman asian todeta rajatuoton ja rajakustannusten avulla?

$$\begin{array}{l}
 a) \quad \left. \begin{array}{l} p = 20.50 \text{ €/kpl} \\ \Delta p = -1 \text{ €/kpl} \\ q = 150 \text{ kpl/kk} \\ \Delta q = x \\ \text{poukko} = -2,1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{poukko} \\ \frac{x}{-1,00 \text{ €/kpl}} \cdot \frac{20,50 \text{ €/kpl}}{150 \text{ kpl/kk}} = -2,1 \\ \Leftrightarrow x = \frac{-2,1 \cdot (-1) \cdot 150 \text{ kpl/kk}}{20,50} = \underline{15,4 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}} \end{array}
 \end{array}$$

b) Ennen muutoksen

$$R_1 = p_1 \cdot q_1 = 20,50 \text{ €/kpl} \cdot 150 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 3075 \text{ €/kk}$$

$$C_1 = C(150) = 300 + 12 \cdot 150 + 0,01 \cdot 150^2 = 2325 \text{ €/kk}$$

Muutoksen jälkeen

$$R_2 = p_2 \cdot q_2 = 19,50 \text{ €/kpl} \cdot 165,4 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 3225,30 \text{ €/kk}$$

$$C_2 = C(165,4) = 300 + 12 \cdot 165,4 + 0,01 \cdot 165,4^2 = 2558,37 \text{ €/kk}$$

→ Tuotto kasvoi

$$\Delta R = R_2 - R_1 = 3225,30 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 3075 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = \underline{150,3 \frac{\text{€}}{\text{kk}}}$$

Kustannukset kasvoivat

$$\Delta C = C_2 - C_1 = 2558,37 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 2325 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = 233,37 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

- Koska kustannukset kasvoivat enemmän kuin tuotot, niin hinnan alennusta ei kannata tehdä