

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

4. harjoitus, (ma 3.10.2011)

1. a) Laske 5.25% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
 b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.008125?

$$a) \begin{aligned} \text{Kuukausi korkotelejä} &= 1+i \\ \text{vuosikorkotelejä} &= 1,0525 \end{aligned}$$

$$(1+i)^{12} = 1,0525$$

$$\Leftrightarrow 1+i = 1,0525^{1/12}$$

$$\Leftrightarrow i = 1,0525^{1/12} - 1 = \underline{\underline{0,00427312776}}$$

$$b) (1+i)^{12} = 1,008125^{12} = 1,10197722$$

\rightarrow tod. vuosikorko 10,20%

2. 1.1.2010 yrittäjä ottaa 20000 euron lainan. Laina-ajaksi sovitaan 15 kuukautta ja lainan todelliseksi vuosikoroksi 6.50%. Yrittäjä ei lyhennä lainaansa eikä maksa korkoja ennen kuin laina-aika on kulunut loppuun 31.3.2011. Silloin hän hoitaa kertamaksulla lainan korkoineen. Miten suureksi laina kasvaa, kun:

- (a) Korkojakso on vuosi, ja korko lasketaan yksinkertaisella korkolaskulla.
 (b) Korkojakso on kuukausi ja $i = 1.0650^{(1/12)} - 1$.
 (c) Käytetään jatkuvaa korkolaskua ja korkointensiteetti on $\rho = \ln(1.0650)$.

$$a) \begin{aligned} &31.12.2010 \text{ lainan pääoma on} \\ K_1 &= (1+i \cdot 1)K_0 = 1,065 \cdot 20000 \text{ €} = 21300 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &31.3.2011 \text{ lainan pääoma on} \\ K_{1,25} &= (1+i \cdot \frac{1}{4})K_1 = (1+0,065 \cdot \frac{1}{4}) \cdot 21300 \text{ €} \\ &= \underline{\underline{21646,13 \text{ €}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) K_{15} &= (1+i)^{15} K_0 = (1,0650^{1/12})^{15} \cdot 20000 \text{ €} = \\ &= 1,0650^{15/12} \cdot 20000 \text{ €} = \underline{\underline{21637,99 \text{ €}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) K_{1,25} &= e^{\rho t} K_0 = e^{(\ln 1,065) \cdot 1,25} \cdot 20000 \text{ €} = \\ &= 1,065^{1,25} \cdot 20000 \text{ €} = \underline{\underline{21637,99 \text{ €}}} \end{aligned}$$

3. Kirjoita seuraavan summan kaikki termit näkyviin ja laske summa sitten sopivalla kaavalla

$$\sum_{k=2}^6 \left(\frac{1}{5} \cdot 2^k\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^6 \frac{1}{5} \cdot 2^k &= \frac{1}{5} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^4 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{1}{5} \cdot 2^6 \\ &= \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{16}{5} + \frac{32}{5} + \frac{64}{5} = \frac{124}{5} \approx 24,8 \end{aligned}$$

Geometrisen summa

$$a_0 = \frac{4}{5}$$

$$n = 5$$

$$q = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = \frac{4}{5} \\ n = 5 \\ q = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Summa} = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= \frac{4}{5} \left(\frac{1-2^5}{1-2} \right) = 24,8$$

4. Olkoon $(1+i)^{12} = 1,0825$. Laske

$$\sum_{k=3}^{25} \frac{100\text{€}}{(1+i)^k}$$

Geometrisen summa

$$1+i = 1,0825^{1/12}$$

$$a_0 = \frac{100\text{€}}{1,0825^{3/12}}$$

$$n = 23$$

$$q = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,0825^{1/12}} = 1,0825^{-1/12}$$

$$\text{Summa} = a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{100\text{€}}{1,0825^{3/12}} \cdot \frac{(1-1,0825^{-23/12})}{(1-1,0825^{-1/12})}$$

$$= \underline{\underline{2098,84\text{€}}}$$

5. Laske annuiteettilainen tasaerä (kuukausierä), kun lainan määrä on 4000€, todellinen vuosikorko on 8.15% ja laina-aika on 20 kuukautta.

$$K_0 = 4000 \text{ €} \quad \text{Kuukausierä}$$

$$1+i = 1,0815^{1/12}$$

$$n = 20$$

$$K = c \cdot K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0$$

$$= \frac{[1,0815^{1/12} - 1] \cdot 1,0815^{20/12}}{(1,0815^{20/12} - 1)} \cdot 4000 \text{ €}$$

$$= \underline{\underline{214,04 \text{ €}}}$$

6. Yrittäjä rakentaa uutta tuotantolinjaa, jonka loppuun tulee pakkauslaite. Saatujen tarjousten perusteella on olemassa kolme mahdollista pakkauslaitetta. Mikä laitteista on mielestäsi edullisin, kun tuotantolinja on toiminnassa toistaiseksi (ainakin 30 vuotta) ja laskentakorkona on 7,50% (todellinen vuosikorko).

laite	hankintahinta (€)	käyttökustannus (€/kk)	käyttöikä (vuotta)
A-pak	7000	80	3
Narux	5000	70	2
Hippo	3000	200	3

$$1+i = 1,0750^{1/12}$$

Kahden vuoden lainalle

$$c_2 = \frac{[1,075^{1/12} - 1] \cdot 1,075^2}{(1,075^2 - 1)}$$

Kolmen vuoden lainalle

$$= 0,0448877772$$

$$c_3 = \frac{[1,075^{1/12} - 1] \cdot 1,075^3}{(1,075^3 - 1)} = 0,030993317$$

Pääomakustannus + käyt. k. kustannus /kk

A-pak $c_3 \cdot 7000 \text{ €} + 80 \text{ €} = 296,95 \text{ €}$

Narux $c_2 \cdot 5000 \text{ €} + 70 \text{ €} = 294,44 \text{ €}$

Hippo $c_3 \cdot 3000 \text{ €} + 200 \text{ €} = 292,98 \text{ €} \leftarrow$ edullisin

Vastaus: Hippo on edullisin

7. Laske osamaksuerä, kun käteishinta on 25000€, käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 800€. Osamaksuerät maksetaan kuukausittain. Maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6.25%.

$$(1+i) = 1,0625^{1/12}$$

$$m = 0,04 \cdot (H-h) = 0,04 \cdot (25000 \text{ €} - 5000 \text{ €}) = 800 \text{ €}$$

$$K = C (H-h+m)$$

$$= \left(\frac{[1,0625^{1/12} - 1] \cdot 1,0625^{15/12}}{1,0625^{15/12} - 1} \right) \cdot (25000 \text{ €} - 5000 \text{ €} + 800 \text{ €})$$

$$= \underline{1443,51 \text{ €}} \quad \text{Vastaus: Osamaksuerä on } \underline{1443,51 \text{ €}}$$

$$\left(\text{Tarkistus } 15 \cdot 1443,51 = 21653 \text{ ok} \right)$$

8. Laske käteishinta, kun käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 4% osamaksuvelasta. Osamaksuerä on 2050€, erät maksetaan kuukausittain, maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6.25%.

$$K = C (H-h+m)$$

$$K = C (H-h + 0,04(H-h))$$

$$K = C \cdot 1,04 (H-h)$$

$$\frac{K}{1,04C} = H-h$$

$$H = \frac{K}{1,04C} + h$$

$$= \frac{2050 \text{ €}}{1,04} \cdot \left(\frac{1,0625^{15/12} - 1}{[1,0625^{1/12} - 1] \cdot 1,0625^{15/12}} \right) + 5000 \text{ €}$$

$$= 33402,80 \text{ €} \approx \underline{\underline{33400 \text{ €}}}$$

$$\left(\text{Tarkistus } 15 \cdot k = 15 \cdot 2050 = 30750 \right. \\ \left. 1,04(H-h) = 1,04 \cdot (33400 - 5000) = 29536 \right. \\ \left. \text{ok} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{Vastaus: Käteishinta on } 33400 \text{ €}}}$$