Vaasan avoin yliopisto, syksy 2011

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

6. harjoitus, (ma 17.10.2011)

1. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 500 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

päätösmuuttujat

x_1 = tuotteen A valmistusmäärä (kpl/viikko)
x_2 = — " — B — " — (kpl/viikko)
x_3 = raaka-aineen myynti (kg/viikko)

tavoitefunktio

$$z = 5x_1 + 7x_2 + 0{,}5x_3$$

rajoitteet

raaka-aine: $10x_1 + 15x_2 + x_3 \le 2500$ (kg)
aika: $15x_1 + 12x_2 \le 40 \cdot 60$ (min)

LP-malli

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1 + 7x_2 + 0{,}5x_3 \\ \text{ehdoin} & 10x_1 + 15x_2 + x_3 \le 2500 \\ & 15x_1 + 12x_2 \le 2400 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}}$$

2. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{array}{llcrcl} \max z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

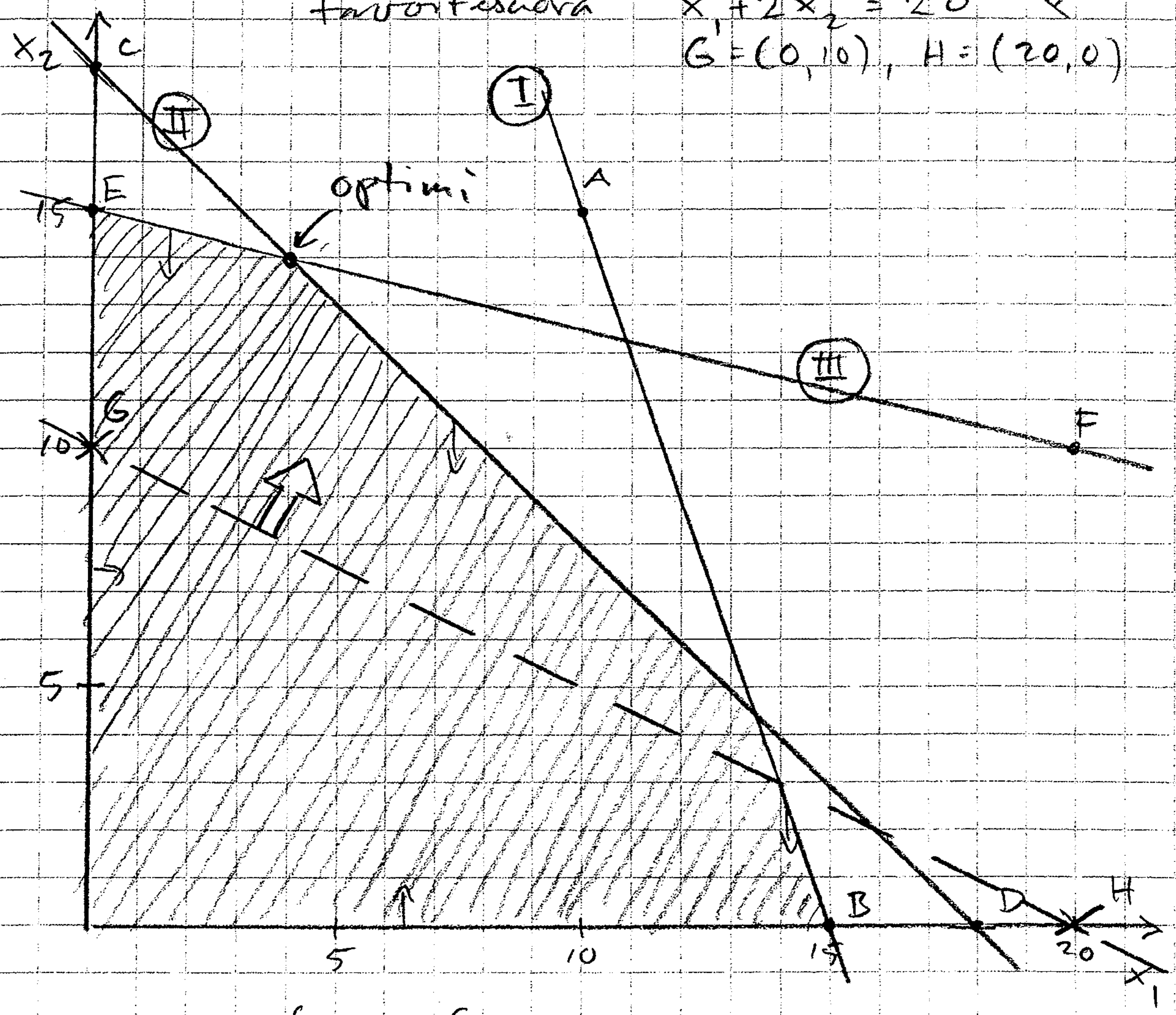
rajoitteet

(1) $3x_1 + x_2 \leq 45$ ↓ alapuoli $A = (10, 15)$, $B = (15, 0)$

(2) $x_1 + x_2 \leq 18$ ↓ alapuoli $C = (0, 18)$, $D = (18, 0)$

(3) $x_1 + 4x_2 \leq 60$ ↓ alapuoli $E = (0, 15)$, $F = (20, 10)$

tavoitesuora $x_1 + 2x_2 = 20$
$G = (0, 10)$, $H = (20, 0)$



Optimissa $\begin{cases} \text{II} \\ \text{III} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = -18 \\ x_1 + 4x_2 = 60 \end{cases}$

$3x_2 = 42 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_2 = 14 \\ x_1 = 4 \\ z = 32 \end{cases}}$

3. Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään kolmella osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

	tuotantoaika (tuntia)		
tuote	os. A	os. B	os. C
1	4	2	8
2	4	4	4

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	320
B	240
C	400

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä "1"-tuotteelta on 300€ja kate yhdeltä "2"-tuotteelta 500€.
Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

x_1 = tuotteen "1" valmistus viikossa (kpl/vko)
x_2 = — " — "2" — " — (kpl/vko)

tavoitefunktio $z = 300x_1 + 500x_2$

rajoitteet

$4x_1 + 4x_2 \leq 320$ (A-osasto)
$2x_1 + 4x_2 \leq 240$ (B-osasto)
$8x_1 + 4x_2 \leq 400$ (C-osasto)

LP-malli

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$
ehdoin
$$4x_1 + 4x_2 \leq 320$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 240$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 400$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

LINDO
$$\begin{cases} x_1 = 26,7 \\ x_2 = 46,7 \\ z = 31\,333,33 \end{cases}$$

4. Edellisessä tehtävässä yrityksen työaika-resurssi on 960 tuntia/viikossa eli 24 työntekijää. a) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille?
b) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos samalla, kun saadaan kaksi uutta työntekijää, on mahdollista kouluttaa vanhojakin työntekijöitä, niin miten työresurssi allokoidaan osastoille yrityksen voiton maksimoimiseksi?

a) uudet päätösmuuttujat

x_A = A osaston lisäresurssi
x_B = B — " — — " —
x_C = C — " — — " —

$$\left(\begin{array}{ll} \max & z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} & 4x_1 + 4x_2 \le 320 + x_A \\ & 2x_1 + 4x_2 \le 240 + x_B \\ & 8x_1 + 4x_2 \le 400 + x_C \\ & x_A + x_B + x_C = 80 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \max & z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} & 4x_1 + 4x_2 - x_A \le 320 \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_B \le 240 \\ & 8x_1 + 4x_2 - x_C \le 400 \\ & x_A + x_B + x_C = 80 \\ & x_1, x_2, x_A, x_B, x_C \ge 0 \end{array}$$

LINDO
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 80 \\ x_A = 0 \\ x_B = 80 \\ x_C = 0 \\ \\ z = 40\,000{,}00 \end{array}\right.$$

b) uudet muuttujat
A-osaston työvoimasi w_a
B — " — " — w_b
C — " — " — w_c

$$\begin{pmatrix} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 4x_1 + 4x_2 \le w_a \\ 2x_1 + 4x_2 \le w_b \\ 8x_1 + 4x_2 \le w_c \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1040 \end{pmatrix}$$

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$
ehdoin
$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 - w_a &\le 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - w_b &\le 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - w_c &\le 0 \\ w_a + w_b + w_c &= 1040 \end{aligned}$$

LINDO $\rightarrow$
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 86{,}7 \\ w_a = 346{,}7 \\ w_b = 346{,}7 \\ w_c = 346{,}7 \\ \\ z = 43333{,}33 \end{cases}$$

5. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue.

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\min z = & x_1 & - & 5x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\
& x_1 & + & x_2 & \geq & 14 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

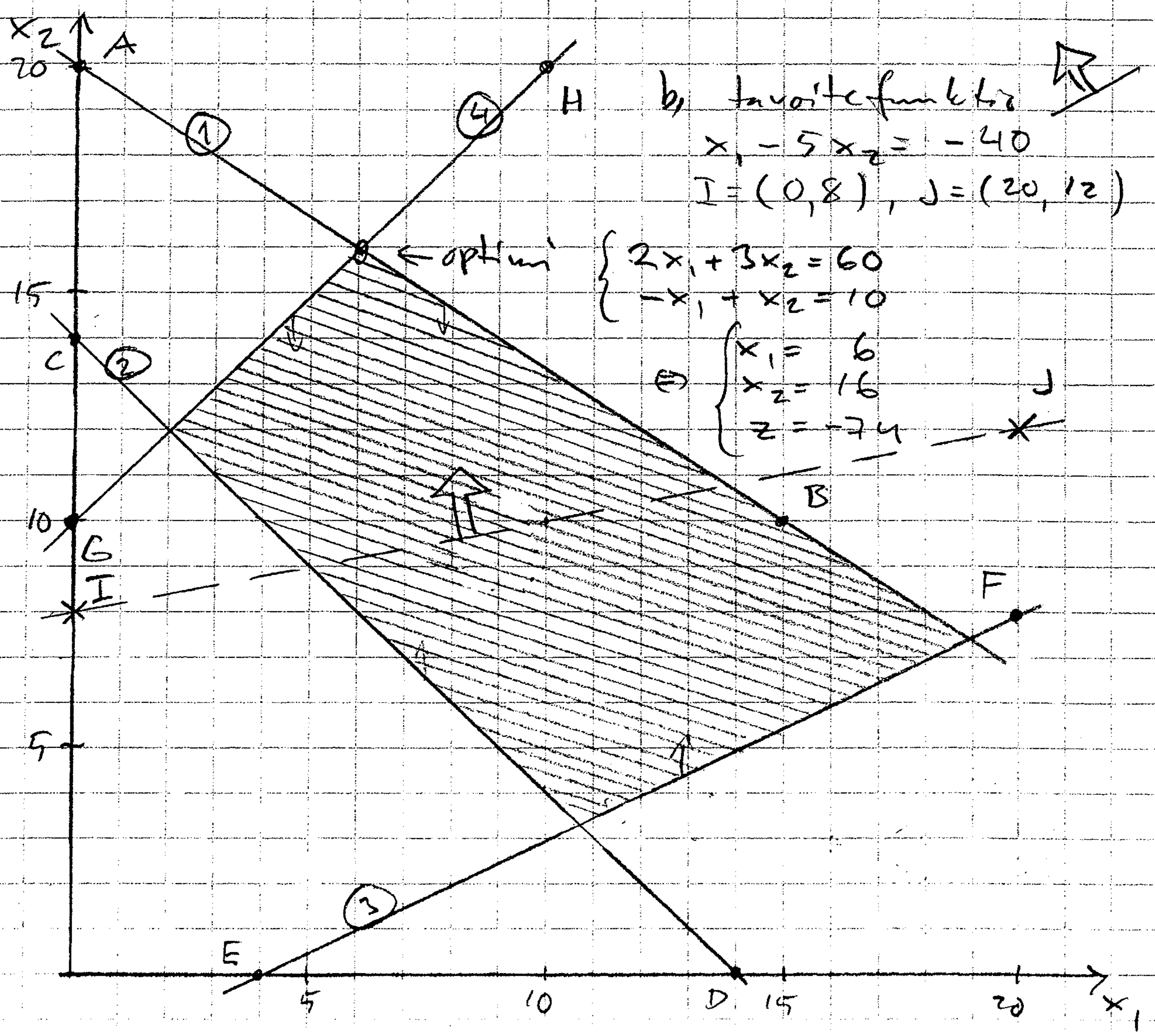
b) Ratkaise malli.

a) 1 $2x_1 + 3x_2 \leq 60$ ↓ $A = (0, 20)$, $B = (15, 10)$

2 $x_1 + x_2 \geq 14$ ↑ $C = (0, 14)$, $D = (14, 0)$

3 $x_1 - 2x_2 \leq 4$ ↑ $E = (4, 0)$, $F = (20, 8)$

4 $-x_1 + x_2 \leq 10$ ↓ $G = (0, 10)$, $H = (10, 20)$



b) tavoitefunktio

$x_1 - 5x_2 = -40$

$I = (0, 8)$, $J = (20, 12)$

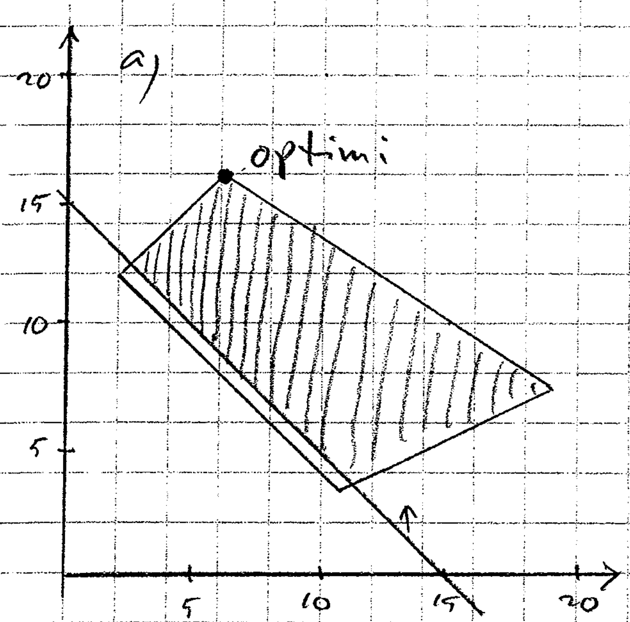
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ -x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 16 \\ z = -74 \end{cases}$$

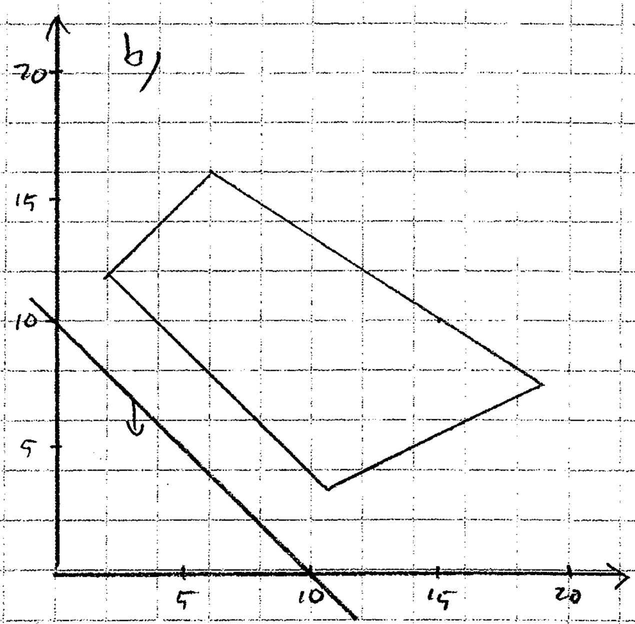
6. a) Miten tehtävän 5 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \leq 10$$





$x_1 + x_2 \geq 15$ ↑ yläp.

$K = (0,15)$, $L = (15,0)$

Käypä alue pienenee, mutta optimi ei muuttunut

$x_1 + x_2 \leq 10$ ↓ alap.

$M = (0,10)$, $N = (10,0)$

Käypä alue tyhjä → ei ratkaisua

7. Laske integraalit

$$\text{a)} \quad \int (3x^2 - x)\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \quad \int_1^4 (2x+1)\mathrm{d}x$$

a) $\int (3x^2 - x)dx = \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) $\int_1^4 (2x+1)\,dx = \Big/_1^4 (x^2 + x) = (4^2+4) - (1^2+1)$
$= 20 - 2 = 18$

8. a) Jatkuva vakiokassavirta on $k = 100€/\mathrm{kk}$ kolmen vuoden ajan ($t_1 = 0$ ja $t_2 = 3$). Laske kassavirran nykyarvo, kun todellinen vuosikorko on 5,00%.

$$NPV = \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} k\, dt$$

b) Sama lasku kuin a-kohdassa, mutta nyt kassavirta kestää kolme kuukautta.

a) $e^{\rho} = 1{,}0500 \Rightarrow \rho = \ln 1{,}05 \left(\frac{1}{\text{vuosi}}\right) \approx 0{,}048790164$

$t_1 = 0$ (vuotta)

$t_2 = 3$ (vuotta) $\quad k = \frac{100\,€}{kk} = 1200\,€/\text{vuosi}$

$NPV = \int_0^3 e^{-\rho t} k\,dt = \Big/_0^3 \frac{k}{-\rho} e^{-\rho t}$

$= \frac{k}{-\rho} e^{-3\rho} - \frac{k}{-\rho} e^{0} = \frac{k}{\rho}(1 - e^{-3\rho}) = \frac{k}{\rho}(1 - 1{,}05^{-3})$

$= \frac{1200\,€/v}{0{,}048790164\,1/v}(1 - 1{,}05^{-3}) = 3348{,}93\,€$

b) $t_1 = 0$ (vuotta)

$t_2 = 3/12$ (vuotta)

$NPV = \int_0^{3/12} e^{-\rho t}\,dt = \frac{k}{\rho}(1 - e^{-\frac{3}{12}\rho})$

$= \frac{1200\,€/v}{0{,}048790164\,1/v}(1 - 1{,}05^{-3/12}) = 298{,}18\,€$