

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow - \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2$$

$$(1) \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

Vastaus:  $x = 1, y = 2$

Tarkistus:  $\begin{cases} 1 + 2 = 3 & \checkmark \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 & \checkmark \end{cases}$

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot 4 \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \leftarrow - \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \rightarrow 0 = -4 \quad \checkmark$$

Vastaus: Ratkaisujoukko on tyhjä

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot 4 \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ 3y = 4 & (2) \\ 0 = 0 & ok \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$(1) \rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vastaus } x = \frac{1}{3} \text{ ja } y = \frac{4}{3}$$

Tarkistus

$$2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2 \quad \checkmark$$

$$4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} = 8 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \quad \checkmark$$

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!) a)  $A+B$ , b)  $A+C$ , c)  $B+C$

$$a) \quad \begin{matrix} A & + & B \\ 3 \times 3 & & 3 \times 3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} A & + & C \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea (eri kokoiset)}$$

$$c) \quad \begin{matrix} B & + & C \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

6. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!) a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$

$$a) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad CA \quad \text{ei voi laskea } (3 \times 2) \cdot (3 \times 3) \quad \checkmark$$

$$e) \quad C^T A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{array} \right) \cdot 3 \quad \leftarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y - 5z = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -z - 1 & (1) \\ y = -5z - 7 & (2) \end{cases}$$

$$z = a$$

$$(2) \rightarrow y = -5a - 7$$

$$(1) \rightarrow x + 2(-5a - 7) = -a - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 9a + 13$$

$$\text{Vastaus } \begin{cases} x = 9a + 13 \\ y = -5a - 7 \\ z = a \end{cases}$$

Tarkistus

$$(9a + 13) + 2(-5a - 7) + a = -1 \quad \checkmark$$

$$3(9a + 13) + 5(-5a - 7) - 2a = 4 \quad \checkmark$$

7. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$p = ( 2.5 \quad 0.5 \quad 1.0 ).$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Laske matriisilauseke  $pD^T$ . (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)
- Onko lauseke  $pD$  järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke  $Dp^T$  järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke  $Dp$  järkevä (mikä sen arvo on)?

a)  $pD^T = (2,5 \quad 0,5 \quad 1) \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix}$   
 $= (65 \quad 70 \quad 45 \quad 90)$  ostet osastoittain

b)  $pD$  ei ole järkevä  $((1 \times 3) \cdot (4 \times 3) \checkmark)$

d)  $Dp$  ei ole järkevä  $((4 \times 3) \cdot (1 \times 3) \checkmark)$

c)  $Dp^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$  ostet osastoittain