

Vaasan kesäyliopisto, kesä 2011

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 8. harjoitus, (ke 17.8.2011)

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu  $A$ :n käänteismatriisi on oikein.  
Siis tarkista, että seuraavat ovat totta

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ratkaise tämän tiedon avulla  $x$  ja  $y$  yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{Vastaus } \begin{cases} x = 8 \\ y = -13 \end{cases}}}$$

$$\left( \text{tarkistus } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \right)$$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina  $(x_0 \ y_0)^T$ . Merkitään vektorilla  $(x_1 \ y_1)^T$  sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla  $(x_2 \ y_2)^T$  sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$(1) \quad A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix}$$

Laske vektorit  $(x_1 \ y_1)^T$  ja  $(x_2 \ y_2)^T$ .

Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin  $A$  käänteismatriisi  $A^{-1}$  on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (2) ja (3) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on  $A^{-1}$  kertaa RHS".

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3. a) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (2), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = A^{-1} \text{in 1. sarake}$$

b) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (3), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista  $A^{-1}$ ?

$$b) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{-1} \text{in 2. sarake}$$

c) Muutosvektorit ovat  $A^{-1}$ in sarakkeet.

#### 4. Laske determinantit

a)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 2 - 3 = \underline{\underline{-1}}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ = 2(1 - 0) - 0 + (5 - 3) = \underline{\underline{4}}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{12}}$$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille  $M$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 0 + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } |M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} +|M_{11}| & -|M_{21}| & +|M_{31}| \\ -|M_{12}| & +|M_{22}| & -|M_{32}| \\ +|M_{13}| & -|M_{23}| & +|M_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} +(3) & -(2) & +(-2) \\ -(2) & +(1) & -(-1) \\ +(0) & -(-1) & +(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille  $N$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot \frac{1}{2} : (-2) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Määritä adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille  $N$ .

$$\det(N) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = 0 - 0 + (1 - 3) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$N^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} + (1) & - (-1) & + (-1) \\ - (1) & + (-3) & - (-1) \\ + (-2) & - (0) & + (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$