Vaasan kesäyliopisto, kesä 2011

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, (to 18.8.2011)

1. a) Onko seuraavalla yhtälöryhmällä yksikäsitteinen ratkaisu?
b) Ratkaise (Cramerin kaavoilla tai muuten) yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\,{:}{:}\,| + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-20-(-18)) - 0 + 3(4-1)$$

$$= -2 - 0 + 9 = 7$$

Kerroinmatriisin determinantti $\neq 0$
$\rightarrow$ on yksikäsitteinen ratkaisu

b)

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -20 \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 0 + 0$$

$$= 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -(-7) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

$$= 42$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 21$$

$$\begin{cases} x = D_1/D = \frac{14}{7} = 2 \\ y = D_2/D = \frac{42}{7} = 6 \\ z = D_3/D = \frac{21}{7} = 3 \end{cases}$$

2 ~~6~~. a) Onko seuraavalla yhtälöryhmällä ei-triviaali ratkaisu?
b) Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ \phantom{3x - {}} y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

a, kerroinkaavion determinantti

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -20 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & 20 \end{vmatrix} - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (20 - (-18)) - 0 + 3(6 - 4)$$

$$= 0 \quad \rightarrow$$ on olemassa ei-triviaali ratkaisu

b,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & -20 & 0 \end{array}\right) \cdot 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{array}\right) \cdot 12$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -4z & (1) \\ y = 2z & (2) \end{cases}$$

$z = 1$

$(2) \rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$

$(1) \rightarrow 3x - 3 \cdot 2 = -4 \cdot 1$

$3x = 2$

$x = 2/3$

V: $\begin{cases} x = 2/3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

3 ~~7~~. a) Millä vakion a arvolla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu?
b) Ratkaise muuttujan x arvo (Cramerin kaavoilla tai muuten) yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 4y - 2z = 5 \\ ax - y + z = 0 \end{cases}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + a \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (4 - (-2)\cdot(-1)) + a((-2)\cdot(-2) - 1 \cdot 4) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + a \cdot 0 \neq 0 \quad \underline{\text{tosi } \forall a} \ \text{!}$$

$\therefore$ Ratkaisu on yksikäsitteinen aina (riippumatta a:n arvosta)

b) $D = 2$ (laskettu edellä)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -5(-2 - (-1)) = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 0 = 5(a-1) = 5a - 5$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = +0 - 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & -1 \end{vmatrix} + 0 = -5(-1 - (-2a)) = -10a + 5$$

$$\underline{x = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{5a-5}{2} = 2{,}5a - 2{,}5}$$

$$\underline{z = \frac{D_3}{D} = \frac{-10a+5}{2} = -5a + 2{,}5}$$

(4) 4. a) Millä vakion a arvoilla alla olevalla matriisilla $\boldsymbol{A}$ on käänteismatrisi? b) Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{A}$. c) Määritä adjungaatti-kaavalla käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Käänteismatriisi on olemassa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2a + 2$$

$\therefore$ on olemassa $A^{-1} \Leftrightarrow -2a+2 \neq 0$
$\Leftrightarrow 2 \neq 2a$
$\Rightarrow \underline{a \neq 1}$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-3) \ \cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & a & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \ \cdot\tfrac{1}{2} \ :(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \frac{a}{2a-2} \quad \frac{a}{2a-2} \quad :(1-a)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2a-2} & \frac{1}{2a-2} & \frac{a}{2a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a-2} & \frac{2a-3}{2a-2} & \frac{-a}{2a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{2a-2} & \frac{-2}{2a-2} & \frac{-2}{2a-2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2a-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 2a-3 & -a \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A) = -2(a-1)$ (ks. a-kohta)

$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-2a$ $\quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = a$ $\quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$ $\quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-2a} \begin{pmatrix} +(1) & -(1) & +(a) \\ -(1) & +(3-2a) & -(-a) \\ +(-2) & -(-2) & +(2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2a-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & 2a-3 & a \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

5 ~~3~~. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000			2010		
tuote	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	15,00	100		10,00	300	
2	8,00	500		15,00	100	
3	30,00	20		20,00	200	

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hinta-indeksit.
b) Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

$$P^L = \frac{10 \cdot 100 + 15 \cdot 500 + 20 \cdot 20}{15 \cdot 100 + 8 \cdot 500 + 30 \cdot 20} \cdot 100 = 146 \quad (t_0)$$

$$P^P = \frac{10 \cdot 300 + 15 \cdot 100 + 20 \cdot 200}{15 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 30 \cdot 200} \cdot 100 = 75 \quad (t)$$

$$Q^L = \frac{300 \cdot 15 + 100 \cdot 8 + 200 \cdot 30}{100 \cdot 15 + 500 \cdot 8 + 20 \cdot 30} \cdot 100 = 185 \quad (t_0)$$

$$Q^P = \frac{300 \cdot 10 + 100 \cdot 15 + 200 \cdot 20}{100 \cdot 10 + 500 \cdot 15 + 20 \cdot 20} \cdot 100 = 95,5 \quad (t)$$

b) Laspeyresin hinta indeksissä painoina ovat perusvuoden määrät q_{t_0} → suurin paino on tuotteella #2, jonka hinta nousi

Paaschenin hinta indeksissä painoina ovat vertailuvuoden määrät q_t → suurin paino on tuotteella #1, jonka hinta laski

Q^L:ssä suurin paino (p_{t_0}) on tuotteella #3, jonka kysyntä kasvoi → $Q^L > 100$

Q^P:ssä suurin paino (p_t) on tuotteilla #2 ja #3
#2:n kysyntä romahti → $Q^P < 100$

6

4. Alla on taulukossa esitettynä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	p_1
	Os2	10	40	50	400	500	p_2
	Os3	20	0	30	200	250	p_3
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt5	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt6	10	15	10		35	50.00

	Os1	Os2	Os3	myynti	yhteensä
Os1	50	100	0	850	1000
Os2	10	40	50	400	500
Os3	20	0	30	200	250
tt1	300	0	700		1000
tt2	400	400	0		800
tt5	70	100	150		320
tt6	10	15	10		35

A=

0,0500	0,2000	0,0000
0,0100	0,0800	0,2000
0,0200	0,0000	0,1200

B =

0,3000	0,0000	2,8000
0,4000	0,8000	0,0000
0,0700	0,2000	0,6000
0,0100	0,0300	0,0400

	kpl		€/kpl		€	
Os1	850	x	7,18	=	6100,27	
Os2	400	x	16,23	=	6493,63	
Os3	200	x	22,78	=	4556,09	17150
tt1	1000	x	1	=	1000	
tt2	800	x	10	=	8000	
tt5	320	x	20	=	6400	
tt6	35	x	50	=	1750	17150

(I-A)^{-1}=

1,0561	0,2296	0,0522
0,0167	1,0906	0,2479
0,024	0,0052	1,1375

B(I-A)^{-1}=

0,3841	0,0835	3,2008
0,4358	0,9643	0,2192
0,0917	0,2373	0,7358
0,012	0,0352	0,0535

I =

1	0	0
0	1	0
0	0	1

p^T = c^TB(I-A)^{-1} --> p = (B(I-A)^{-1})^T c

$p^T = c^T B(I-A)^{-1} \rightarrow p = (B(I-A)^{-1})^T c$

$p = \begin{pmatrix} 7,18 \\ 16,23 \\ 22,78 \end{pmatrix}$