

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. välikoe Torstai 12.8.2010

opettaja: Matti Laaksonen

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava).

1. a) Ratkaise yhtälö

$$1.03^x = 1.20$$

b) Mitä kansantalouden oppikirjassa tarkoitetaan, kun esimerkkiyrityksen tuotto-funktiosta $R(q)$ sanotaan, että

$$\frac{\partial R}{\partial q} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} < 0 \quad ?$$

$$a) \quad 1,03^x = 1,20 \quad | \quad \ln$$

$$\Rightarrow x \ln 1,03 = \ln 1,20$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln 1,20}{\ln 1,03} \approx 6,17$$

$$b) \quad \frac{\partial R}{\partial q} > 0 \Leftrightarrow R(q) \text{ on kasvava}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial q^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial q} \text{ on vähenevä}$$

$$\Rightarrow MR \text{ on vähenevä}$$

2. Yritys valmistaa kuukaudessa q tuotetta. Tuotteen kysyntäfunktio on $p = 28 - 0.05q$, ja rajakustannusfunktio on $MC(q) = 0.2q + 10$.

a) Millä tuotantomäärällä voitto on suurin mahdollinen?

b) Miten suuri saa kiinteä kustannus enintään olla, kun vaaditaan että optimivoitto $P(q^*)$ on vähintään 10% vastaavasta myyntituotosta $R(q^*)$? (Ohje: q^* on a-kohdassa laskettu optimaalinen tuotannon määrä.)

$$\begin{aligned} a) \quad p &= 28 - 0.05q \\ R &= 28q - 0.05q^2 \\ MR &= 28 - 0.1q \qquad MC = 0.2q + 10 \end{aligned}$$

Voiton maksimointi

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 0.2q + 10 &= 28 - 0.1q \\ 0.3q &= 18 \quad | \cdot 10 : 3 \\ q &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad MC &= 0.2q + 10 \\ C &= 0.1q^2 + 10q + FC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P &= R - C = (28q - 0.05q^2) - (0.1q^2 + 10q + FC) \\ &= -0.15q^2 + 18q - FC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(60) &= -0.15 \cdot 60^2 + 18 \cdot 60 - FC \\ &= 540 - FC \end{aligned}$$

$$R(60) = 28 \cdot 60 - 0.05 \cdot 60^2 = 1500$$

$$P(60) \geq \frac{10}{100} \cdot R(60)$$

$$\Leftrightarrow 540 - FC \geq 0.1 \cdot 1500$$

$$\Leftrightarrow 540 - FC \geq 150$$

$$\Leftrightarrow 390 \geq FC$$

Vastaus: a) $q = 60$

b) $FC \leq 390$

3. a) Selitä lyhyesti mitä tarkoittaa muuttujan y jousto muuttujan x suhteen.
 b) Tuotteen kysynnän hintajousto on -2.0 . Tuotteen hinta on nyt 25.00 € ja kysyntä $120\,000$ tuotetta vuodessa. Miten tuotteen kysyntä muuttuu, kun hinta alennetaan eurolla?

a) y :n jousto x :n suhteen on

y :n $\%$ -muutos jaettuna x :n $\%$ -muutokell.

$$\text{jousto} = \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

$$b) \begin{cases} q = 120\,000 \text{ kpl/vuosi} \\ p = 25.00 \text{ €/kpl} \\ \Delta q = x \\ \Delta p = -1.00 \text{ €/kpl} \\ \text{jousto} = -2.0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-1.00 \text{ €/kpl}} \cdot \frac{25.00 \text{ €/kpl}}{120\,000 \text{ kpl/vuosi}} = -2.0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2.0 \cdot (-1.0) \cdot 120\,000 \text{ kpl/vuosi}}{25.00} = 9600 \text{ kpl/vuosi}$$

Vastaus: kysyntä kasvaa 9600 kpl/vuosi

4. a) (2p) Mikä on kuukausijaksoon liittyvä korkokanta, ja mikä on jatkuvaan korkolaskuun liittyvä korkointensiteetti, kun todellinen vuosikorko on 8.15%?
 b) (1p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijaksoon liittyvä korkokanta on 0.006627967?
 c) (3p) Lake tasaerälainen annuiteetti, kun lainan määrä on 20 000 €, laina-aika on 30 kuukautta, lainaa hoidetaan kuukausittain, ja lainaan liittyvän todellinen vuosikorko on 8.15%.

$$\begin{aligned}
 a) \quad (1+i)^{12} &= 1,0815 \\
 \rightarrow i &= 1,0815^{\frac{1}{12}} - 1 = \underline{\underline{0,00655044144}} \\
 \rightarrow g &= \ln(1+i) = \ln(1,0815^{\frac{1}{12}}) \\
 &= \underline{\underline{0,00652908053}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad (1+i)^{12} &= (1,006627967)^{12} = 1,082500003 \\
 \rightarrow \text{todellinen vuosikorko on } &\underline{\underline{8,25\%}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad K &= CK_0 \\
 &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 \\
 &= \frac{[1,0815^{\frac{1}{12}} - 1] \cdot 1,0815^{\frac{30}{12}}}{(1,0815^{30/12} - 1)} \cdot 20\,000 \text{ €} \\
 &= 736,49 \text{ €}
 \end{aligned}$$

$$\left(\text{Tarkistus } 30 \cdot 736,49 \text{ €} = 22\,094,70 \text{ € de} \right)$$

Varaus

$$\begin{aligned}
 a) \quad i &= 0,00655044144 \\
 g &= 0,00652908053 \\
 b) \quad \text{tod. vuosikorko} &= 8,25\% \\
 c) \quad K &= 736,49 \text{ €}
 \end{aligned}$$