

3.1.1 Esimerkki (Markovin ketju)

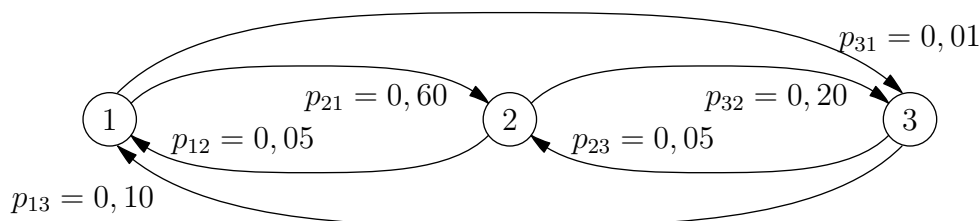
Suomalainen 'FlyBike'-talli ottaa vuosittain osaa Trans-Silvanian ympäriajoja kymmenellä pyöräilijällä. Tallin manageri tekee karkeaa laskelmaa tulevien vuosien taloussuunnittelua varten. Manageri luokittelee tallinsa urheilijat kolmeen ryhmään "aloittelijat", "kokeneet" ja "tähdet". Urheilijat maksavat osan voittopalkkioistaan sekä pr- ja mainosopimustensa tuotoista tallille. Keskimääräiset tallin tuotot eri ryhmissä ovat seuraavan taulukon mukaiset. Talukossa on myös eri ryhmiin kuuluvien urheilijoiden lukumäärät tällä kaudella.

ryhmä	tuotto	lkm nyt
(1) aloittelijat	$r_1 = 300$	$n_1 = 6$
(2) kokeneet	$r_2 = 2000$	$n_2 = 3$
(3) tähdet	$r_3 = 10000$	$n_3 = 1$

Muodostetaan taulukon sarakkeista vektorit $\vec{r} = (300, 2000, 10000)^T$ ja $\vec{n} = (6, 3, 1)^T$. Tallin tämän kauden tuotto on

$$R_0 = \vec{n} \cdot \vec{r} = 6 \cdot 300 + 3 \cdot 2000 + 1 \cdot 10000 = 17800.$$

Tallin harjoitusohjelma sekä valmennus- ja huoltotuki takaa sen, että urheilijat kehittyvät uransa aikana. Siirtymätodennäköisyydet urheilijan siirtymiselle ryhmästä toiseen yhden kauden kuluessa ovat seuraavat:



Kaaviossa kirjaimella p_{ij} merkitään todennäköisyyttä sille, että tällä kaudella ryhmässä j polkeva urheilija, kilpailee seuraavalla kaudella ryhmässä i . Siirtymät $(1 \rightarrow 2)$ ja $(2 \rightarrow 3)$ ovat luonnollisia valmennuksesta seuraavaa urakehitystä. Siirtymät $(2 \rightarrow 1)$, $(3 \rightarrow 2)$ ja $(3 \rightarrow 1)$ ovat joko loukkaantumisesta johtuvia taantumia, tai seurausta siitä, että kokenut urheilija tai tähti lopettaa uransa ja hänet korvataan kokemattomammalla.

Saattaa tuntua oudolta, että siirtymään $(1 \rightarrow 2)$ liitetään siirtymätodennäköisyys p_{21} . Tuntuu kuin indeksit olisivat väärinpäin. Pian huomaat, että indeksit kannattaa merkitä juuri näin!

p_{kk} on todennäköisyys sille, että urheilija joka on nyt ryhmässä k , jatkaa seuraavankin kauden samassa ryhmässä. Alkeistodennäköisyyksien summa on yksi, joten

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1 - p_{21} - p_{31} = 1 - 0.60 - 0.01 = 0.39 \\ p_{22} &= 1 - p_{12} - p_{32} = 1 - 0.05 - 0.20 = 0.75 \\ p_{33} &= 1 - p_{13} - p_{23} = 1 - 0.10 - 0.05 = 0.85 \end{aligned}$$

Tiedämme siis urheilijoiden lukumäärät eri ryhmissä nyt ($\vec{n}(0)$) sekä siirtymätodennäköisyydet. Näiden avulla voimme laskea odotusarvot urheilijoiden lukumäärille eri ryhmissä ensi kaudella ($\vec{n}(1)$) kaavoilla

$$\begin{aligned}n_1(1) &= p_{11}n_1(0) + p_{12}n_2(0) + p_{13}n_3(0) \\n_2(1) &= p_{21}n_1(0) + p_{22}n_2(0) + p_{23}n_3(0) \\n_3(1) &= p_{31}n_1(0) + p_{32}n_2(0) + p_{33}n_3(0)\end{aligned}$$

eli

$$\vec{n}(1) = \mathbf{P}\vec{n}(0),$$

missä $\mathbf{P}$ on matriisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.05 & 0.10 \\ 0.60 & 0.75 & 0.05 \\ 0.01 & 0.20 & 0.85 \end{pmatrix}.$$

Odotusarvo k :nnen kauden ryhmien suuruuksille on

$$\vec{n}(k) = \mathbf{P}\vec{n}(k-1) = \mathbf{P}^k\vec{n}(0).$$

Teemme pienen python-ohjelman nähdäksemme seuraavan kymmenen kauden odotusarvot. Kirjoitamme seuraavat komentorivit tekstitiedostoon "flybike.py":

```
# - - - - -
from numpy import *
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],[0.60, 0.75, 0.10],[0.01, 0.10, 0.85]],float);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
#
print '\n k    n1(k)    n2(k)    n3(k)'
for k in range(11):
    nk = (P**k)*n;
    print '%3d    %5.3f    %5.3f    %5.3f ' % (k,nk[0,0],nk[1,0],nk[2,0]);
# - - - - -
```

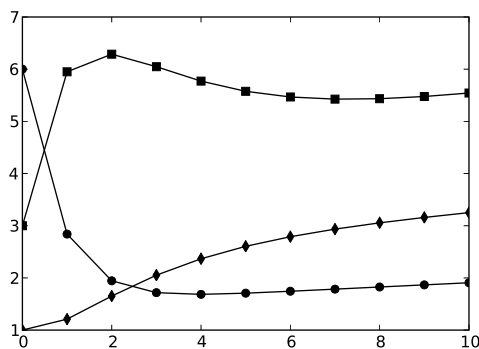
Komento 'python flybike.py' tuottaa tulosteen:

k	n1(k)	n2(k)	n3(k)
0	6.000	3.000	1.000
1	2.840	5.950	1.210
2	1.945	6.287	1.652
3	1.718	6.048	2.052
4	1.685	5.771	2.366
5	1.708	5.576	2.605
6	1.745	5.467	2.789
7	1.785	5.426	2.935
8	1.826	5.434	3.055
9	1.867	5.477	3.159
10	1.907	5.543	3.251

Pythonilla saamme myös helposti graafisen esityksen eri ryhmien kokojen kehitykselle. Tiedostoon "flybike2.py" kirjoitamme ohjelman:

```
# - - - - -
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
#
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],[0.60, 0.75, 0.10],[0.01, 0.10, 0.85]],float);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
#
x = zeros((11,1));
n1 = zeros((11,1));
n2 = zeros((11,1));
n3 = zeros((11,1));
for k in range(11):
    nk = (P**k)*n;
    n1[k] = nk[0];
    n2[k] = nk[1];
    n3[k] = nk[2];
    x[k] =k;
#

plt.plot(x,n1,'k-o',x,n2,'k-s',x,n3,'k-d');
plt.show()
# - - - - -
```



Ryhmien koko tulevina kausina

Lisätään vielä samaan kuvaan tallin saama tulo kausittain. Piirrämme kaksi erillistä koordinaatistoa samaan kuvaan ja lisäämme joitakin otsikkotekstejä. Seuraavassa tiedosto "flybike3.py" ja sen piirtämä kuva:

```

# - - - - -
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
#
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],[0.60, 0.75, 0.10],[0.01, 0.10, 0.85]],float);
r = matrix([[300,2000,10000]]);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
#
x = zeros((11,1));
n1 = zeros((11,1));
n2 = zeros((11,1));
n3 = zeros((11,1));
tulo = zeros((11,1));

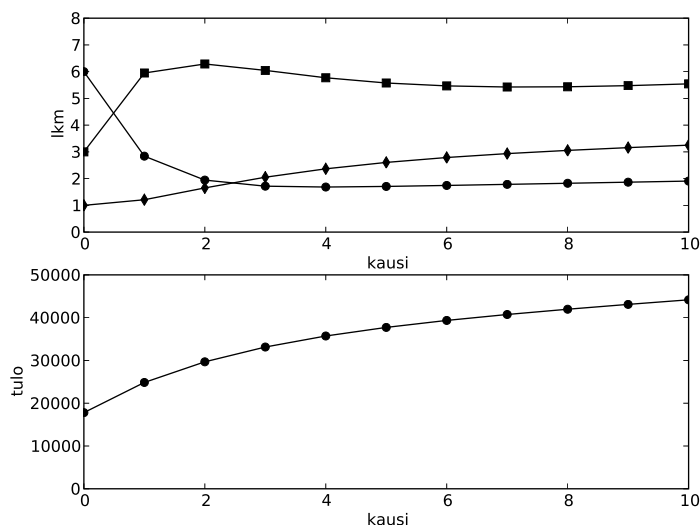
for k in range(11):
    nk = (P**k)*n;
    n1[k] = nk[0];
    n2[k] = nk[1];
    n3[k] = nk[2];
    x[k] =k;
    tulo[k] = r*nk;
#
fig = plt.figure();

kuva1 = fig.add_subplot(211);
kuva1.plot(x,n1,'k-o',x,n2,'k-s',x,n3,'k-d');
kuva1.set_xlabel('kausi');
kuva1.set_ylabel('lkm');
kuva1.axis([0,10,0,8]);

kuva2 = fig.add_subplot(212);
kuva2.plot(x,tulo,'k-o');
kuva2.set_xlabel('kausi');
kuva2.set_ylabel('tulo');
kuva2.axis([0,10,0,50000]);

plt.show()
# - - - - -

```



Ryhmien koko ja tallin tulo tulevina kausina

Manageri haluaa laskea odotusarvojen mukaisen tulovirran nykyarvon. Käytämme laskelmassa diskonttauskorkoa 10%. Otamme laskelmassa huomioon ainoastaan tämän kauden ja 10 seuraavaa kautta. Käännämme esimerkin alussa esiintyneen tuottovektorin $\vec{r}$ vaakavektoriksi

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 300 & 2000 & 10000 \end{pmatrix}.$$

Kauden k tuotto on nyt

$$R(k) = \mathbf{r}\mathbf{n}(k) = \mathbf{r}\mathbf{P}^k\mathbf{n}(0).$$

Tulovirran nykyarvo on

$$\begin{aligned} NPV &= \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{1.10^k} R(k) = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{1.10^k} \mathbf{r}\mathbf{P}^k\mathbf{n}(0) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{1.10^k} \mathbf{r}\mathbf{P}^k \right) \mathbf{n}(0) \end{aligned}$$

Edellä sovellettiin lauseen (42) kohtaa 3 muodossa:

$$(\mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{B}\mathbf{n} + \cdots + \mathbf{W}\mathbf{n}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{W})\mathbf{n}$$

Nykyarvon viimeisessä lausekkeessa oleva sulkulauseke $\mathbf{M} = (\sum_{k=0}^{10} 1.10^{-k} \mathbf{r}\mathbf{P}^k)$ on helppo laskea pythonilla, ja se sisältää tärkeitä tietoa.

```
# (flybike4.py) - - - - -
from numpy import *
#
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],[0.60, 0.75, 0.10],[0.01, 0.10, 0.85]],float);
r = matrix([[300,2000,10000]]);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
```

```

M = matrix(zeros((1,3)));
for k in range(11):
    M = M + r*(P**k)/(1.10**k);

NPV = M*n;

print "M =",M
print "NPV =",NPV
# - - - - -

```

Ohjelma tulostaa kaksi riviä:

```

M   = [[ 18397.93167705  22952.13950971  56387.14181808]]
NPV = [[ 235631.15040949]]

```

Trans-Silvanian ympäriaajo-projektin kassavirran nykyarvo on siis noin 235 600 ja tämä voidaan vielä esittää muodossa

$$\begin{aligned}
 NPV &= \mathbf{M}\mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 18\,400 & 23\,000 & 56\,400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} \\
 &= 18\,400n_1(0) + 23\,000n_2(0) + 56\,400n_3(0)
 \end{aligned}$$

Nykyarvon viimeisestä lausekkeesta manageri näkee, että yhden uuden kokeneen pyöräilijän saaminen tiimiin kasvattaa kassavirran nykyarvoa 23 000:lla. Vastaavasti yhdestä aloittelijasta luopuminen pienentää kassavirran nykyarvoa 18 400:lla. Jos säännöt sallivat enintään 10 pyöräilijää, ja manageri pystyy korvaamaan yhden aloittelijan kokeneella pyöräilijällä, niin kassavirran nykyarvo kasvaa 4 600:lla. Toisaalta, jos manageri pystyy korvaamaan yhden aloittelijan tähtipolkijalla, niin kassavirran nykyarvo kasvaa 37 000:lla.

3.2 Transponointi

Seuraavassa määriteltävää transpoosimerkintää käytetään paljon. Vaikka asia on yksinkertainen, sen pitää tulla täydellisen tutuksi. Edellisessä esimerkissä käänsimme sarakevektorin rivivektoriksi, jotta lausekkeet olisivat helpompia kirjoittaa. Jotta ei aina tarvitsisi huomautella tekstissä tehdyistä kääntämisistä, sovimme asiaa varten täsmällisen merkintätavan.

Määritelmä 44. $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ transponoitu matriisi eli transpoosi on $n \times m$ -matriisi $\mathbf{A}^T$ jolle

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

(Matriisi $\mathbf{A}^T$ saadaan siis $\mathbf{A}$:sta vaihtamalla vaakarivit pystysarakkeiksi.)

Esimerkki 45.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$$