

10. harjoitus, (to 9.12.2010)

1. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

tuote	2000			2010		
	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	10,00	200		15,00	300	
2	2,00	500		8,00	100	
3	30,00	20		15,00	100	

a) Laske Laspeyres'in hinta- ja volyyymi-indeksit.

b) Laske Paaschenin hinta- ja volyyymi-indeksit.

$$a) P^L = \frac{\sum p_t q_{t0}}{\sum p_{t0} q_{t0}} \cdot 100\% = \frac{15 \cdot 200 + 8 \cdot 500 + 15 \cdot 20}{10 \cdot 200 + 2 \cdot 500 + 30 \cdot 20} \cdot 100\% = 203\%$$

$$P^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_{t0} q_t} \cdot 100\% = \frac{15 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 15 \cdot 100}{10 \cdot 300 + 2 \cdot 100 + 30 \cdot 100} \cdot 100\% = 110\%$$

$$b) Q^L = \frac{\sum q_t p_{t0}}{\sum q_{t0} p_{t0}} \cdot 100\% = \frac{300 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 30}{200 \cdot 10 + 500 \cdot 2 + 20 \cdot 30} \cdot 100\% = 172\%$$

$$Q^P = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_{t0} p_t} \cdot 100\% = \frac{300 \cdot 15 + 100 \cdot 8 + 100 \cdot 15}{200 \cdot 15 + 500 \cdot 8 + 20 \cdot 15} \cdot 100\% = 93\%$$

Indeksejä

$$\text{Laspeyresin hintaindeksi } P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t,i} q_{t_0,i}}{\sum_i p_{t_0,i} q_{t_0,i}} \cdot 100\%$$

$$\text{Paaschen hintaindeksi } P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t,i} q_{t,i}}{\sum_i p_{t_0,i} q_{t,i}} \cdot 100\%$$

$$\text{Laspeyresin volyyymi-indeksi } Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t,i} p_{t_0,i}}{\sum_i q_{t_0,i} p_{t_0,i}} \cdot 100\%$$

$$\text{Paaschen volyyymi-indeksi } Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t,i} p_{t,i}}{\sum_i q_{t_0,i} p_{t,i}} \cdot 100\%$$

2. Seuraavassa taulukossa on taulukoituna mittausajanhetket ja kolme aikasarjaa u_t , w_t ja y_t .

k	t_k	u_{t_k}	w_{t_k}	y_{t_k}
1	0.10	1.65	0.64	2.21
2	0.20	2.09	1.12	2.44
3	0.30	2.32	1.04	3.14
4	0.40	2.81	0.83	3.68
5	0.50	2.78	0.35	4.61
6	0.60	3.19	-0.20	5.26
7	0.70	3.19	-0.65	5.62
8	0.80	3.09	-0.99	5.73
9	0.90	3.11	-0.71	5.26
10	1.00	3.22	-0.07	4.49

Kumpi selitysmalli on nyt parempi

$$(1) \quad y_t = c_1 e^{-t} + c_2 u_t + c_3 w_t$$

vai

$$(2) \quad y_t = d_1 t + d_2 u_t + d_3 w_t$$

k	z_k	e_k	u_k	w_k	y_k		e_k	u_k	w_k						
1	0,1	0,905	1,65	0,64	2,21	X =	0,905	1,65	0,64	C =	0,75561819	Y^A =	2,45392085	D =	-0,24392085
2	0,2	0,819	2,09	1,12	2,44		0,819	2,09	1,12		1,42767521		2,57794304		-0,13794304
3	0,3	0,741	2,32	1,04	3,14		0,741	2,32	1,04		-0,91477322		2,92061807		0,21938193
4	0,4	0,670	2,81	0,83	3,68		0,670	2,81	0,83				3,75901159		-0,07901159
5	0,5	0,607	2,78	0,35	4,61		0,607	2,78	0,35				4,10707206		0,50292794
6	0,6	0,549	3,19	-0,2	5,26		0,549	3,19	-0,2				5,15193062		0,10806938
7	0,7	0,497	3,19	-0,65	5,62		0,497	3,19	-0,65				5,5241154		0,0958846
8	0,8	0,449	3,09	-0,99	5,73		0,449	3,09	-0,99				5,65666302		0,07333698
9	0,9	0,407	3,11	-0,71	5,26		0,407	3,11	-0,71				5,39677032		-0,13677032
10	1	0,368	3,22	-0,07	4,49		0,368	3,22	-0,07				4,9391247		-0,4491247

y_k

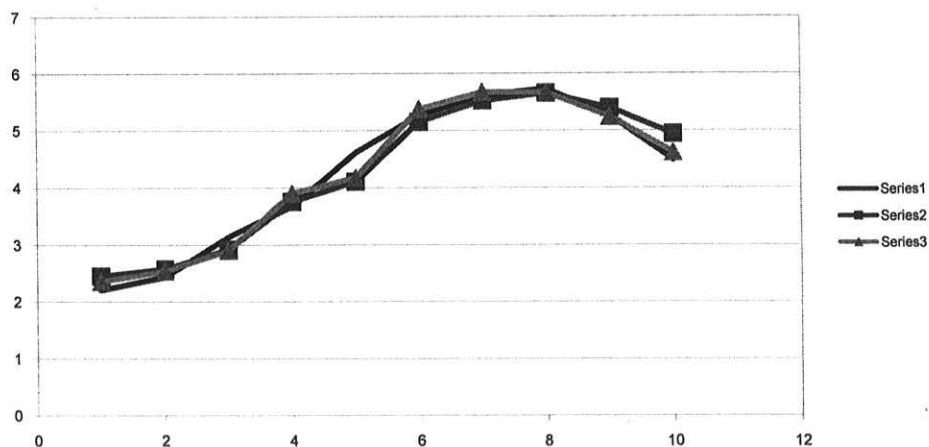
|d| = 0,63250372

2,21	X =	0,1	1,65	0,64	C =	-1,69109217	Y^A =	2,35890564	D =	-0,14890564
2,44		0,2	2,09	1,12		1,93691605		2,54111702		-0,10111702
3,14		0,3	2,32	1,04		-1,04358847		2,90098558		0,23901442
3,68		0,4	2,81	0,83				3,9001188		-0,2201188
4,61		0,5	2,78	0,35				4,17382457		0,43617543
5,26		0,6	3,19	-0,2				5,37282459		-0,11282459
5,62		0,7	3,19	-0,65				5,67333019		-0,05333019
5,73		0,8	3,09	-0,99				5,66534945		0,06465055
5,26		0,9	3,11	-0,71				5,24277378		0,01722622
4,49		1	3,22	-0,07				4,61882871		-0,12882871

y_k Y^A1 Y^A2

|d| = 0,3648735

1	2,2	2,454	2,36
2	2,4	2,578	2,54
3	3,1	2,921	2,9
4	3,7	3,759	3,9
5	4,6	4,107	4,17
6	5,3	5,152	5,37
7	5,6	5,524	5,67
8	5,7	5,657	5,67
9	5,3	5,397	5,24
10	4,5	4,939	4,62



3. a) Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kolmea tuotetta A, B ja C. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 20min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 20kg. Tuotteen C valmistaminen vie aikaa 2min ja raaka-ainetta 750g. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on normaalisti käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden a-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 €, yhden b-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 € ja yhden c-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 0.30 €. Muodosta LP-malli voiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia)

päätös muuttujat

x_1 = tuotteen A valmistus (kpl/vko)

x_2 = " " B " " " "

x_3 = " " C " " " "

Tavoite funktio $z = 5x_1 + 7x_2 + 0,3x_3$

Rajoitteet

Raaka-aine $10x_1 + 20x_2 + 0,75x_3 \leq 2500$ (kg/vko)

työ $20x_1 + 15x_2 + 2x_3 \leq 2400$ (min/vko)

LP-malli

$$\max z = 5x_1 + 7x_2 + 0,3x_3$$

$$\text{ehdoin } 10x_1 + 20x_2 + 0,75x_3 \leq 2500$$

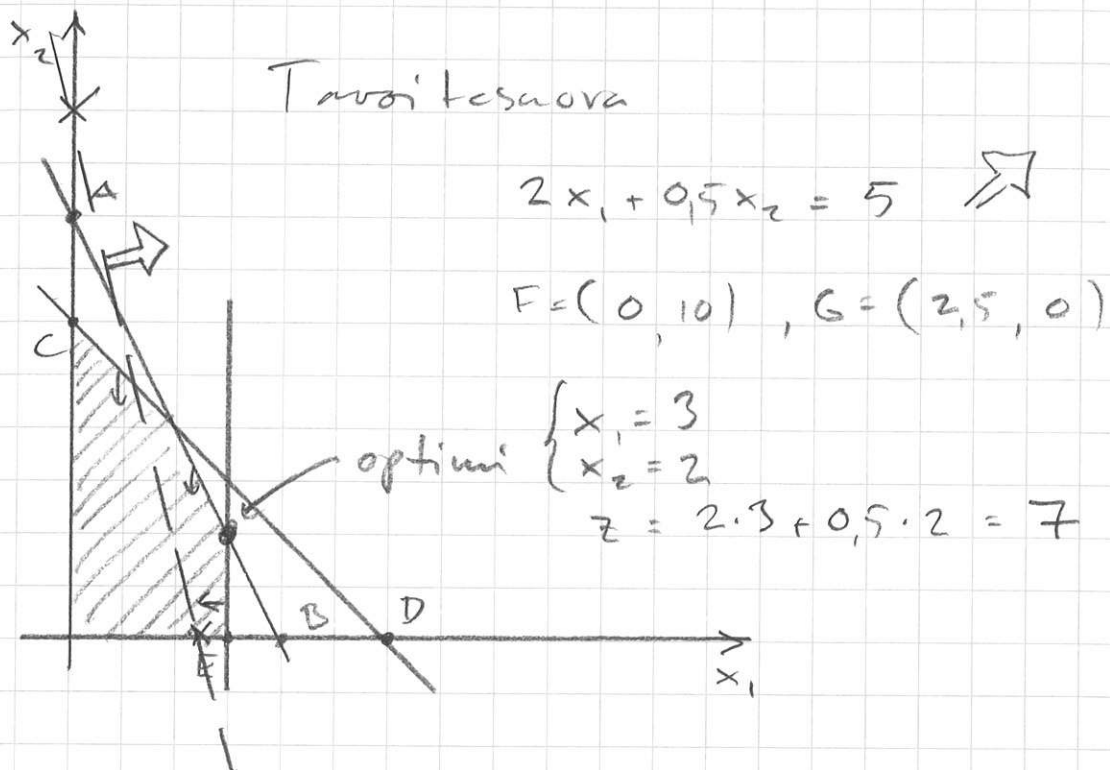
$$20x_1 + 15x_2 + 2x_3 \leq 2400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{ll} \max z = & 2x_1 + 0.5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

rajoite 1 $2x_1 + x_2 \leq 8$ $\downarrow$ alap. $A=(0,8)$, $B=(4,0)$
rajoite 2 $x_1 + x_2 \leq 6$ $\downarrow$ alap. $C=(0,6)$, $D=(6,0)$
rajoite 3 $x_1 \leq 3$ $\leftarrow$ vas.p. $E=(3,0)$



Vastaus optimaalinen $x_1 = 3, x_2 = 2, z = 7$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -3 \\ -x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+1 \\ -2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+1 \\ +2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\cdot (-1) \\ : (-2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = -3 & (1) \\ y - z = 2 & (2) \\ z = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 2$$

$$(2) \rightarrow y - 2 = 2 \rightarrow y = 4$$

$$(1) \rightarrow x - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -3 \rightarrow x = 1$$

$$\text{Vastaus } x = 1, y = 4, z = 2$$

Tarkistus

$$\begin{cases} 1 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -3 & \checkmark \\ -1 + 4 - 2 = 1 & \checkmark \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 2 = -8 & \checkmark \end{cases}$$

5. Laske $\det(M)$, M^T ja M^{-1} matriisille

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - (-1)) + (1 - (-5)) + 3(1 - 5) \\ &= 2 + 6 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |M_{11}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 & |M_{12}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6 & |M_{13}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 \\ |M_{21}| &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 & |M_{22}| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14 & |M_{23}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6 \\ |M_{31}| &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 & |M_{32}| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 & |M_{33}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} +|M_{11}| & -|M_{21}| & +|M_{31}| \\ -|M_{12}| & +|M_{22}| & -|M_{32}| \\ +|M_{13}| & -|M_{23}| & +|M_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} +(2) & -(-4) & +(-2) \\ -(-4) & +(-14) & -(-4) \\ +(-4) & -(6) & +(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,5 & -1 & 0,5 \\ 1,5 & 3,5 & -1 \\ 1 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$