

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, (la 30.10.2010)

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2x + 2 = 7x + 8$ b) $6(x + 2) = 5x + 10$ c) $3x + 1 = 3(x + 1)$

$$\begin{array}{l|l|l} \text{a) } 2x + 2 = 7x + 8 & \text{b) } 6(x + 2) = 5x + 10 & \text{c) } 3x + 1 = 3(x + 1) \\ -5x = 6 & 6x + 12 = 5x + 10 & 3x + 1 = 3x + 3 \\ \quad | :(-5) & & \\ x = \frac{6}{-5} & x = 2 & 0 = 2 \quad \downarrow \downarrow \\ & & \text{Ei on tyytyväisiä} \end{array}$$

Vastaus: a) $x = -1,2$ b) $x = 2$ c) ratkaisun joukko tyhjä

2. Ratkaise yhtälöt

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4$ c) $(x + 1)(x - 3) = (x + 1)$

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \\ x &= -\frac{1}{2} \text{ tai } x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5x^2 + x &= 4x^2 - 2x + 4 \\ x^2 + 3x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \\ x &= 1 \text{ tai } x = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x + 1)(x - 3) &= (x + 1) \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ x &= 4 \text{ tai } x = -1 \end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \frac{1}{2} \text{ tai } x = -1 \\ \text{b) } x &= 1 \text{ tai } x = -4 \\ \text{c) } x &= 4 \text{ tai } x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x + 1)(x - 3) &= (x + 1) \\ \Leftrightarrow x + 1 &= 0 \text{ tai } x - 3 = 1 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \text{ tai } x = 4 \end{aligned}$$

3. Ratkaise yhtälöt

a) $2^x = 3$

b) $\ln(x-1) = 100$

c) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 2^x &= 3 \\ \Leftrightarrow x \ln 2 &= \ln 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ x &= 1,585 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \ln(x-1) &= 100 & \text{exp()} \\ \Leftrightarrow x-1 &= e^{100} \\ \Leftrightarrow x &= 1 + e^{100} \\ x &\approx 2,69 \cdot 10^{43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{2x+1}{x-1} &= 3 & | \cdot (x-1), x \neq 1 \\ \Rightarrow 2x+1 &= 3(x-1) \\ \Leftrightarrow 2x+1 &= 3x-3 \\ \Leftrightarrow -x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus:

a) $x = 1,585$

b) $x = 2,69 \cdot 10^{43}$

c) $x = 4$

4. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x-1 \leq 3x+1$

b) $3(x+1) \geq 5(x-1)$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x-1 &\leq 3x+1 \\ \Leftrightarrow x-3x &\leq 1+1 \\ \Leftrightarrow -2x &\leq 2 & | :(-2) \\ \Leftrightarrow x &\geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 3(x+1) &\geq 5(x-1) \\ 3x+3 &\geq 5x-5 \\ -2x &\geq -8 & | :(-2) \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x \geq -1$ b) $x \leq 4$

5. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25.20 € ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18.10 € (per tuote). Myyntitulo on $256 \cdot 25.20 \text{ €} = 6451.20 \text{ €}$, valmistuskustannus on $256 \cdot 18,10 \text{ €} = 4633.60 \text{ €}$. Kate on myyntitulo - valmistuskustannus = $6451.20 \text{ €} - 4633.60 \text{ €} = 1817,60$. Kate on siis 28.17% myynnistä.

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 5,0%.

- Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- Laske helmikuun kate (euroina).
- Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

	TAMMI	HELMI
Myynti n (kpl/kk)	$n_1 = 256 \text{ kpl/kk}$	$n_2 = 300 \text{ kpl/kk}$
hinta p (€/kpl)	$p_1 = 25,20 \text{ €/kpl}$	$p_2 = p_1 = 25,20 \text{ €/kpl}$
valm. kust. c (€/kpl)	$c_1 = 18,10 \text{ €/kpl}$	$c_2 = 1,05 \cdot c_1$
		$=$
Myyntitulo $R = n \cdot p$ (€/kk)	$R_1 = n_1 \cdot p_1 = 6451,20 \text{ €/kk}$	$R_2 = n_2 \cdot p_2$
		$= 7560 \text{ €/kk}$
Kok. kust. $TC = n \cdot c$ (€/kk)	$TC_1 = n_1 \cdot c_1$	$TC_2 = n_2 \cdot c_2$
	$= 4633,60 \text{ €/kk}$	$= 5701,50 \text{ €/kk}$
Kate $K = R - TC$	$K_1 = R_1 - TC_1$	$K_2 = R_2 - TC_2$
	$= 1817,60 \text{ €/kk}$	$= 1858,50 \text{ €/kk}$
Kate % $k_p = \frac{K}{R} \cdot 100\%$	$k_{p1} = \frac{1817,60}{6451,20} \cdot 100\%$	$k_{p2} = \frac{1858,50}{7560} \cdot 100\%$
	$= 28,17\%$	$= 24,58\%$

a) 7560 € b) 5701,50 € c) 1858,50 € d) 24,58 %

e) $\frac{R_2 - R_1}{R_1} \cdot 100\% = \frac{7560 - 6451,20}{6451,20} \cdot 100\% = \underline{17,2\%}$

f) $\frac{TC_2 - TC_1}{TC_1} \cdot 100\% = \underline{23,0\%}$ g) $\frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \underline{+2,25\%}$

h) $k_{p2} - k_{p1} = 24,58\% - 28,17\% = \underline{-3,59\% - yksikköä}$

6. Yritys tarvitsee raaka-aineena pahvia, joka kerätään kierrätysmateriaalista. Kierrätysmateriaalia voidaan ostaa kolmesta paikasta (A, B, C). Kaikki kierrätysmateriaali pitää vielä itse tarkastaa ja hylätyn materiaalin toimittaminen eteenpäin aiheuttaa edelleen kustannuksia. Seuraavassa taulukossa on esitetty keskimääräisiä lukuja eri vaihtoehtoista.

	A	B	C
kierrätysmateriaalin hinta (per tonni)	100.00	125.00	95.00
Hylättävän materiaalin osuus	6.0%	2.0%	10.0%
Tarkastuksen hinta (per kierr.mat.tonni)	10.0 €	11.0 €	12.0 €
Hylätyn materiaalin käsittely (€ /tonni)	20.0	15.0	5.0

Laske raaka-aine -pahvin tonnihinta kussakin hankintavaihtoehdossa,

	A	B	C
Kierrätysmateriaalin määrä [tn]	M	M	M
hylättyä [tn]	0,06M	0,02M	0,10M
Hyvän materiaalin määrä [tn]	0,94M	0,98M	0,90M

Kustannukset

$$\textcircled{A} \quad 100 \cdot M + 10 \cdot M + 20 \cdot 0,06M = 111,2 \cdot M$$

$$\textcircled{B} \quad 125 \cdot M + 11 \cdot M + 15 \cdot 0,02M = 136,3 \cdot M$$

$$\textcircled{C} \quad 95 \cdot M + 12 \cdot M + 5 \cdot 0,10M = 107,5 \cdot M$$

Keskikoko-kustannukset €/tn

$$\textcircled{A} \quad \frac{111,2M}{0,94M} = 118,30 \text{ €/tn} \quad \leftarrow \text{edullisin}$$

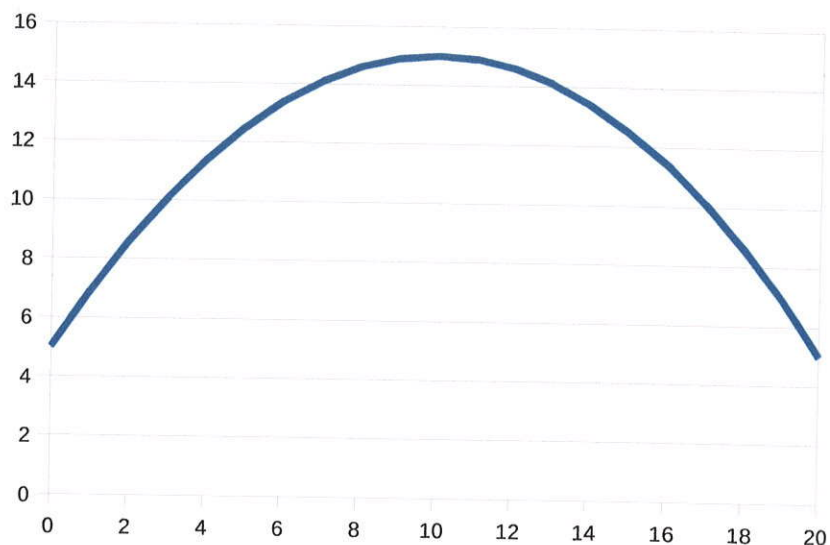
$$\textcircled{B} \quad \frac{136,3M}{0,98M} = 139,08 \text{ €/tn}$$

$$\textcircled{C} \quad \frac{107,5M}{0,90M} = 119,44 \text{ €/tn}$$

7. Piirrä funktion $f(x) = 5 + 2x - 0.1x^2$ kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille $0 \leq x \leq 20$.)

x f(x)

0	5
1	6,9
2	8,6
3	10,1
4	11,4
5	12,5
6	13,4
7	14,1
8	14,6
9	14,9
10	15
11	14,9
12	14,6
13	14,1
14	13,4
15	12,5
16	11,4
17	10,1
18	8,6
19	6,9
20	5



funktio on kasvava välillä $0 \leq x \leq 10$

funktio on vähenevä välillä $10 \leq x \leq 20$

8*. a) Ratkaise yhtälö

$$\underbrace{-5000 + \frac{3000}{(1+x)} + \frac{1500}{(1+x)^2} + \frac{1500}{(1+x)^3}}_{=LHS(x)} = 0$$

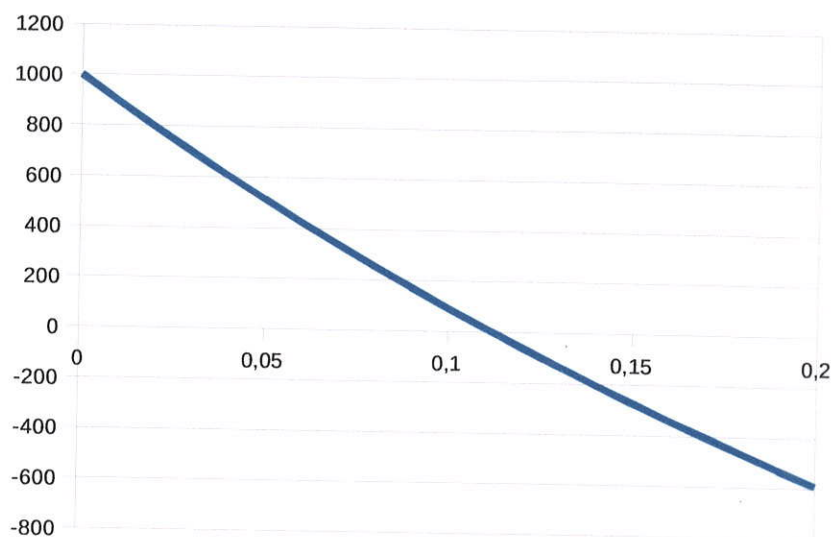
(Ohje: Piirrä LHS:n kuvaaja välille $0 \leq x \leq 0.2$.)

b) Onko $LHS(x)$ vähenevä, kun $x > 0$?

c) Mitä b-kohdan vastaus merkitsee yhtälön ratkaisujen lukumäärän kannalta. (Onko juuria yksi vai useampi?)

a)

x	f(x)
0	1000
0,01	896,6263
0,02	796,4131
0,03	699,2277
0,04	604,9442
0,05	513,4435
0,06	424,6123
0,07	338,3432
0,08	254,5344
0,09	173,0888
0,1	93,91435
0,11	16,92342
0,12	-57,9674
0,13	-130,837
0,14	-201,762
0,15	-270,814
0,16	-338,062
0,17	-403,571
0,18	-467,404
0,19	-529,621
0,2	-590,278



b) Kun x kasvaa, niin $1+x$, $(1+x)^2$, ja $(1+x)^3$ kasvavat

→ Koska LHS:n viimeiset termit vähenevät

→ $LHS(x)$ on vähenevä funktio

(aidosti)

c) Vähenevällä funktiolla on olemassa vain yksi nollakohta.