

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, (la 6.11.2010)

1. Piirrä välillä $0 \leq x \leq 5$ kuvaajat funktioille

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 4x - 6$$

2. Ovatko tehtävän 1 funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ kasvavia välillä $0 \leq x \leq 5$?

3. Ratkaise

$$\text{a) } 1.05^x = 1.50 \quad \text{b) } (1.05)^x \geq (1.15)^3$$

4. Yritys haluaa lisätä valmistamansa tuotteen myyntiä. Tätä varten yritys joutuu laskemaan tuotteensa myyntihintaa. Markkinointiosasto selvitti kysyntää ja arvelee, että yritys saa myytyä q tuotetta (viikossa), jos tuotteen myyntihinta on $p = 20 - 0.25q$ (euroa). Mikä pitää myyntihinnan olla, jos yritys haluaa, että myynnistä kertyy viikossa vähintään 375 euroa?

5. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 7q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 11250$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.005q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30 €, joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $0 < q < 3000$. Mikä on $AC(q)$:n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

(Ohje: yksiköt $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$, $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$, $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$)

6. Laske tehtävässä 5 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}.$$

Millä q :n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 3 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q :n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämänkin tehtävän 3 kuvan avulla.

7. Laske derivaatat

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f'(3), \quad \text{kun } f(x) = x^2 - 4x, \\ \text{b)} & g'(x), \quad \text{kun } g(x) = 7x^2 + 5x - 3, \\ \text{c)} & h'(x), \quad \text{kun } h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5) \end{array}$$

8. Kustannusfunktio on $C(q) = 0.05q^2 + 6q + 200$. a) Määritä rajakustannus $MC(q)$, yksikkökustannus $AC(q)$ ja kiinteät kustannukset FC . b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on $q = 100$?

9. Yritys valmistaa tuotteita ja myy ne kappalehintaan 25 euroa. Rajakustannus on 6 euroa/tuote ja kysynnän hintajousto on $\eta = -1.2$. Kannattaako yrityksen laajentaa vai supistaa tuotantoaan? (Ohje: $MR = p(1 + \frac{1}{\eta})$.)

10. Miten paljon vähenee tuotteen kysyntä viikossa, jos kysyntä on nyt 2300 tuotetta viikossa, hintaa nostetaan 12.50 eurosta 15.00 euroon ja kysynnän hintajousto on -1.5?

11. Yritys tuo tarvitsemansa raaka-aineen laivakuljetuksina välivarastoon. Laskentaosasto on selvittänyt, että jos yritys vuodessa käyttää raaka-ainetta r tonnia, niin raaka-aine kannattaa tuoda $b = 1.25 \cdot r^{0.5}$ tonnin kuljetuserissä. Laske b :n jousto r :n suhteen.

$$\text{jousto} = \frac{db}{dr} \cdot \frac{r}{b}$$

12. Yrittäjä tutkii kirjanpitoaan ja päätyy seuraavaan arvioon: ”Kun tuotannon määrä oli $q = 10$ tuotetta viikossa, rajatuotto oli $MR = 60$. Kun tuotannon määrä oli $q = 11$ tuotetta viikossa, rajatuotto oli $MR = 56$.” Millaista lineaarista kysyntäfunktiota yrittäjän tulee käyttää voiton maksimoinnissa. (Ohje: $MR = a - bq$ kertoimet selviää yhtälöistä $a - b \cdot 10 = 60$ ja $a - b \cdot 11 = 56$, lausekkeesta $MR(q) = a - bq$ voi päätellä $R(q)$:n (huomaa $R(0) = 0$ eli vakiotermi on nolla), $p = R/q$)

13. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.025q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.1q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon q määrällä voitto on suurin mahdollinen, ja miten suuri tämä voiton maksimiarvo on?

Tehtävissä esiintyneet funktiot:

$R(q)$ = tuotto (revenue)	$R(q) = pq$
$MR(q)$ = rajatuotto (marginal revenue)	$MR(q) = R'(q)$
$C(q)$ = kustannukset (cost)	
$MC(q)$ = rajakustannukset (marginal cost)	$MC(q) = C'(q)$
$P(q)$ = Voitto (profit)	$P(q) = R(q) - C(q)$
$FC(q)$ = kiinteät kustannukset (fixed cost)	
$VC(q)$ = muuttuvat kustannukset (variable cost)	$C = VC + FC$
$AC(q)$ = yksikkökustannukset (average cost)	$AC = C/q$
$AVC(q)$ = muuttuvat yksikkökustannukset	$AVC = VC/q$
$AFC(q)$ = kiinteät yksikkökustannukset	$AFC = FC/q$