

H2 ke 22.1. ma 27.9. 2010 / avoin yo

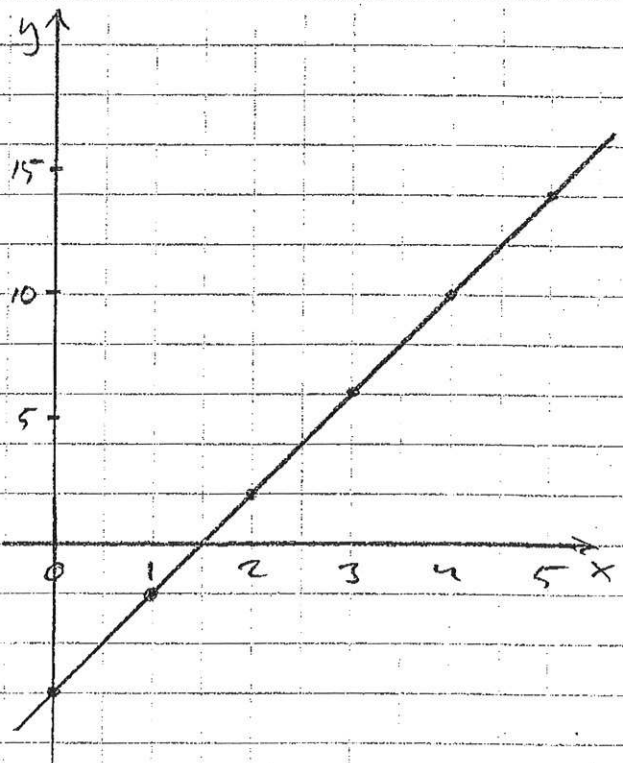
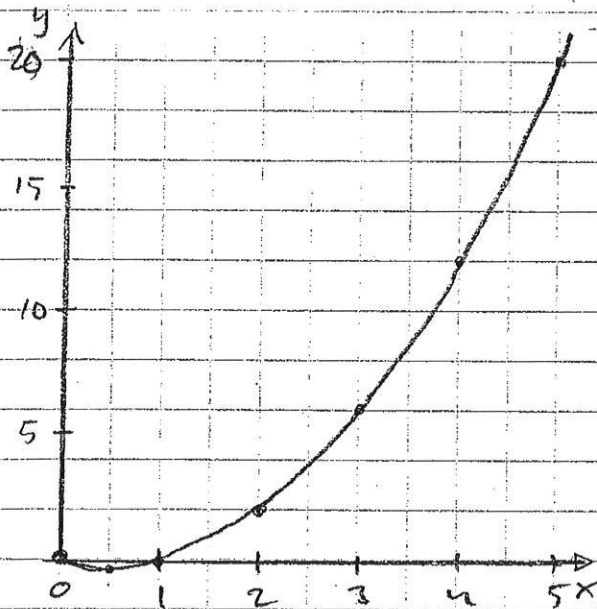
1. Piirrä välillä $0 \leq x \leq 5$ kuvaajat funktioille

$$f(x) = x^2 - x$$

$$g(x) = 4x - 6$$

x	$f(x) = x^2 - x$
0.0	$0^2 - 0 = 0,00$
0.5	$0,5^2 - 0,5 = -0,25$
1.0	$1,0^2 - 1,0 = 0,00$
2.0	$2,0^2 - 2,0 = 2,00$
3.0	$3,0^2 - 3,0 = 6,00$
4.0	$4,0^2 - 4,0 = 12,00$
5.0	$5,0^2 - 5,0 = 20,00$

x	$g(x) = 4x - 6$
0.0	$4 \cdot 0,0 - 6 = -6$
1.0	$4 \cdot 1,0 - 6 = -2$
2.0	$4 \cdot 2,0 - 6 = 2$
3.0	$4 \cdot 3,0 - 6 = 6$
4.0	$4 \cdot 4,0 - 6 = 10$
5.0	$4 \cdot 5,0 - 6 = 14$



2. Ovatko tehtävän 1 funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ kasvavia välillä $0 \leq x \leq 5$?

f ei ole kasvava välillä $0 \leq x \leq 5$
(perustelu: $0 < 0,5$, mutta $f(0) > f(0,5)$)

g on kasvava välillä $0 \leq x \leq 5$
(perustelu: $\underbrace{g(x_1 + \Delta x)}_{=x_2} = g(x_1) + 4\Delta x > g(x_1)$)

3. Olkoon f ja g samat kuin edellisessä tehtävässä. Selvitä yhdistetyn funktion $h(x) = (f \circ g)(x)$ lauseke ja laske $h(1)$ ja $h(2)$. Minkä tyyppinen funktio h on?

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\&= f(4x-6) \\&= (4x-6)^2 - (4x-6) \\&= 16x^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6 + 6^2 - 4x + 6 \\&= 16x^2 - 52x + 30\end{aligned}$$

$$h(1) = 16 \cdot 1^2 - 52 \cdot 1 + 30 = 16 - 52 + 30 = -6$$

$$h(2) = 16 \cdot 2^2 - 52 \cdot 2 + 30 = 64 - 104 + 30 = -10$$

h :n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja h on toisen asteen polynomi-funktio

4. Yritys haluaa lisätä valmistamansa tuotteen myyntiä. Tätä varten yritys joutuu laskemaan tuotteensa myyntihintaa. Markkinointiosasto selvitti kysyntää ja arvelee, että yritys saa myytyä q tuotetta (viikossa), jos tuotteen myyntihinta on $p = 20 - 0.25q$ (euroa). Mikä pitää myyntihinnan olla, jos yritys haluaa, että myynnistä kertyy viikossa vähintään 375 euroa?

Kysyntäfunktio

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0,25q \\ 0,25q &= 20 - p \quad | \cdot 4 \\ q &= 80 - 4p \end{aligned}$$

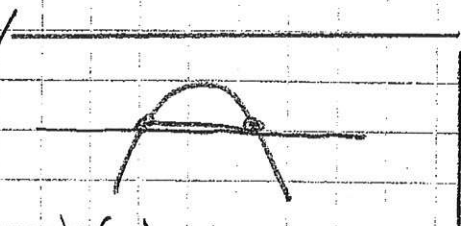
Myynnistä kertyvä tulo (viikossa) ≥ 375 €

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow pq &\geq 375 \\ \Leftrightarrow p(80 - 4p) &\geq 375 \\ \Leftrightarrow -4p^2 + 80p - 375 &\geq 0 \\ &= h(p) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{7,50 \leq p \leq 12,50}$$

Vastaus: hinnan tulee olla vähintään 7,50 € ja enintään 12,50 €

(Siis välillä $7,50 \text{ €} \leq p \leq 12,50 \text{ €}$)



$$\begin{aligned} h(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4p^2 + 80p - 375 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-375)}}{2 \cdot (-4)} \\ \Leftrightarrow p &= \frac{-80 \pm 20}{-8} \\ \Leftrightarrow p &= 7,50 \text{ tai } p = 12,50 \end{aligned}$$

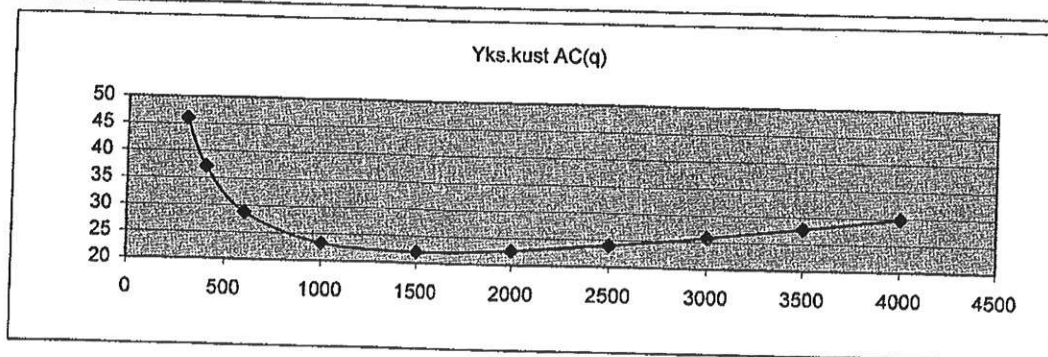
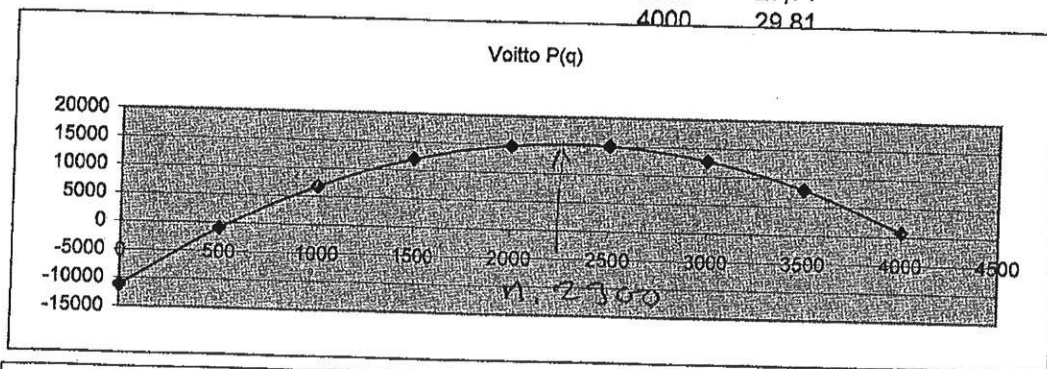
5. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7€, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 7q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 11250$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.005q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $0 < q < 3000$. Mikä on $AC(q)$:n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

(Ohje: yksiköt $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$, $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$, $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$)

$$P(q) = 23q - 0,005q^2 - 11250 \quad (\text{€}/\text{vko}) \quad [q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$$

$$AC(q) = \frac{11250}{q} + 7 + 0,005q \quad (\text{€}/\text{kpl})$$

q	$P(q) = 23q - 0,005q^2 - 11250$	q	$AC(q) = 11250/q + 7 + 0,005q$
0	-11250	0	
500	-1000	300	46,00
1000	6750	400	37,13
1500	12000	600	28,75
2000	14750	1000	23,25
2500	15000	1500	22,00
3000	12750	2000	22,63
3500	8000	2500	24,00
4000	750	3000	25,75
		3500	27,71
		4000	29,81



V: Järkevä tuotannon määrä n. 2300 kpl/vko
 $[AC] = \text{€}/\text{kpl}$

6. Ratkaise

a) $1.05^x = 1.50$ b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3$

a) $1.05^x = 1.50 \quad | \ln()$

$\Rightarrow x \ln(1.05) = \ln(1.50)$

$\Rightarrow x = \frac{\ln(1.50)}{\ln(1.05)} = 8.31$

b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3 \quad | \ln()$

$\Rightarrow x \ln(1.05) \geq 3 \cdot \ln(1.15)$

$\Rightarrow x \geq \frac{3 \cdot \ln(1.15)}{\ln(1.05)}$

$x \geq 8.59$

Vastaus: a) $x = 8.31$ b) $x \geq 8.59$

7. Laske tehtävässä 5 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}$$

Millä q :n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 3 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q :n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämänkin tehtävän 3 kuvan avulla.

$P(q) = 23q - 0.005q^2 - 11250$

$P'(q) = 23 - 0.01q$

$P'(q) = 0$

$\Rightarrow 23 - 0.01q = 0$

$\Rightarrow 0.01q = 23 \quad | \cdot 100$

$\Rightarrow \underline{q = 2300}$

sopii kuvaan

$P'(q) \geq 0$

$\Rightarrow 23 - 0.01q \geq 0$

$\Rightarrow -0.01q \geq -23 \quad | \cdot (-100)$

$\Rightarrow \underline{q \leq 2300}$

sopii kuvaan

8. Laske derivaatat

- a) $f'(3)$, kun $f(x) = x^2 - 4x$,
b) $g'(x)$, kun $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$,
c) $h'(x)$, kun $h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5)$

a) $f(x) = x^2 - 4x$
 $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

b) $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$
 $g'(x) = 14x + 5$

c) $h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5)$
 $= 3x^3 - 15x$
 $h'(x) = 9x^2 - 15$

Vastaus: a) $f'(3) = 2$
b) $g'(x) = 14x + 5$
c) $h'(x) = 9x^2 - 15$