

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

3. harjoitus, (to 11.11.2010)

Voiton maksimointia

1. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). On arvioitu, että hintaan 4 euroa/tuote saadaan myytyä 100 tuotetta viikossa ja hintaan 3 euroa/tuote saadaan myytyä 200 tuotetta viikossa. Käytetään seuraavassa laskelmassa lineaarista kysyntäfunktiota $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton?
(voitto = myyntitulo - kustannukset)

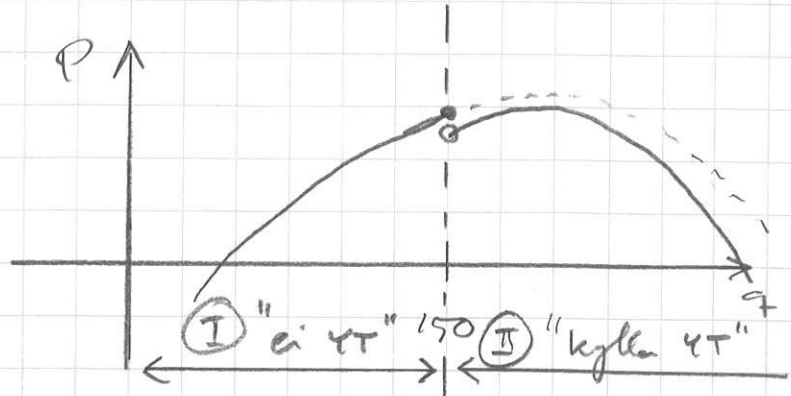
$$\begin{aligned}P &= 5 - 0,01q \\R &= 5q - 0,01q^2 \\MR &= 5 - 0,02q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 1,5q + 230 \\MC &= 1,5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MC &= MR \\ \Rightarrow 1,5 &= 5 - 0,02q \\ \Rightarrow 0,02q &= 3,5 & | \cdot 50 \\ \Rightarrow q &= 175\end{aligned}$$

Vastaus: voitto on suurin, kun yritys valmistaa 175 tuotetta viikossa

2. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 1 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo - kustannukset)?



$$R = 5q - 0,01q^2$$

(sama kuin edellä)

$$C = \begin{cases} 1,5q + 230 & , q \leq 150 \\ 1,5 \cdot 150 + 1,6(q - 150) + 250 & , q > 150 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1,5q + 230 & , q \leq 150 \\ 1,6q + 235 & , q > 150 \end{cases}$$

$$P(q) = R(q) - C(q) = \begin{cases} 3,5q - 0,01q^2 - 230 & , q \leq 150 \\ 3,4q - 0,01q^2 - 235 & , q > 150 \end{cases}$$

① $q \leq 150$

$$P' = 3,5 - 0,02q$$

P

+					+		$P'=0$
0				150	175		q

↑
max, kun $q=150$

② $q > 150$

$$P' = 3,4 - 0,02q$$

P

+		-		$P'=0$
150		175		

↑
max, kun $q=175$

$$P(150) = 3,5 \cdot 150 - 0,01 \cdot 150^2 - 230 = 70 \leftarrow \text{parampi}$$

$$P(175) = 3,4 \cdot 175 - 0,01 \cdot 175^2 - 235 = 54$$

V: Yritys saa suurimman voiton, kun se valmistaa 150 tuotetta viikosta (Ei siis tehdä ylityötä)

Jousto (Huomaa tehtävät 9, 10 ja 11 harjoituksessa H3)

3. Miten paljon erään tuotteen kysyntä muuttui, jos hinta nousi 90 eurosta 100 euroon, kun muuttunut kysyntä on 400 kappaletta kuussa ja kysynnän hintajousto on -1.5 .

Ennen	Jälkeen	muutos
$q_1 = (400 - x) \frac{\text{kp}}{\text{kk}}$	$q_2 = 400 \frac{\text{kp}}{\text{kk}}$	$\Delta q = q_2 - q_1 = x \frac{\text{kp}}{\text{kk}}$
$p_1 = 90 \text{ €}$	$p_2 = 100 \text{ €}$	$\Delta p = p_2 - p_1 = 100 \text{ €} - 90 \text{ €} = 10 \text{ €}$

$$\boxed{\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p_1}{q_1} = \text{jousto}} \Rightarrow \frac{x \frac{\text{kp}}{\text{kk}}}{10 \text{ €}} \cdot \frac{90 \text{ €}}{(400 - x) \frac{\text{kp}}{\text{kk}}} = -1,5$$

$$\Rightarrow 90x = -1,5 \cdot 10 \cdot (400 - x)$$

$$\Rightarrow 90x = 15x - 6000$$

$$\Rightarrow 75x = -6000$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6000}{75} \approx -80$$

V: tuotteen kysyntä vähenee 80 kpl/kk

Korkolasku ja diskonttaus

4. Otat lainaa 1000 euroa. Lainaa ei hoideta kahteen vuoteen ja kahden vuoden kuluttua laina maksetaan korkoineen pois. Lainan todellinen vuosikorko on 5.25%.

a) Mikä on kuukausijakssoon liittyvä kuukausi-korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 5.25%?

b) Miten suureksi lainan pääoma kasvoi kahdessa vuodessa? (Käytä koronkoronkaavassa vuosijaksoa ja todellista vuosikorkoa.)

c) Laske kuukausijaksotusta ja kuukausi-korkokantaa käyttäen lainan kasvanut pääoma 18 kuukauden kuluttua.

d) Laske jatkuvan korkolaskun avulla lainan kasvanut pääoma 18 kuukauden kuluttua.

kuukausijaksoston korkokanta i

$$a) (1+i)^{12} = 1,0525 \Rightarrow i = 1,0525^{1/12} - 1 = 0,00427312776$$

$$b) K_2 = (1+i_a)^2 K_0 = (1,0525)^2 \cdot 1000 \text{ €} = 1107,76 \text{ €}$$

$$c) (1+i)^{18} K_0 = ((1+i_a)^{1/12})^{18} K_0 = (1,0525)^{18/12} \cdot 1000 \text{ €} = 1079,77 \text{ €}$$

$$d) (1+i_a)^{18/12} K_0 = 1,0525^{1,5} \cdot 1000 \text{ €} = 1079,77 \text{ €}$$

5. Pääomalle maksetaan kuukausittain 1,25% korko. Laske todellinen vuosikorko.

$$\text{vuosikorkotehijä on } (1,0125)^{12} = 1,160754518$$
$$\rightarrow \text{tod. vuosikorko on } 16,075\%$$

6. Laske kuukausikorkokanta, jos todellinen vuosikorko on 10,25%.

$$(1+i)^{12} = 1,1025$$
$$\rightarrow i = 1,1025^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00816484605$$

7. a) Lainaaja lainasi 1000 € rahaa 1600 €:n velkakirjaa vastaan maksettavaksi 3 vuoden kuluttua. Mikä oli korkoprosentti? (todellinen vuosikorko.)

b) Miten pitkässä ajassa lainan pääoma kaksinkertaistuu, jos lainaa ei lyhennetä ja todellinen vuosikorko on 12%?

$$a) K_3 = (1+i_a)^3 \cdot K_0$$
$$\rightarrow (1+i_a)^3 = \frac{K_3}{K_0}$$
$$\rightarrow 1+i_a = \left(\frac{K_3}{K_0}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1600}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,169607$$
$$\rightarrow \text{tod. vuosikorko on } 16,69\%$$

$$b) (1+i_a)^n = 2$$

$$\Leftrightarrow 1,12^n = 2$$

$$\Leftrightarrow n \ln 1,12 = \ln 2 \quad | : \ln 1,12$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,12} = 6,1 \text{ (vuotta)}$$

Vastaus noin 6 vuodessa

8. Sinulle tarjotaan arvopaperia, joka antaa sinulle 25 000 € tulon kolmen vuoden kuluttua tästä hetkestä. (Tulon realisoimisen jälkeen paperi on arvoton.) Miten paljon enintään kannattaa arvopaperista maksaa, kun haluat sijoittamallasi pääomalle 10%:n vuosikoron. (Ohje: diskonttaa kolmen jakson yli [koron koron kaavoilla].)

$$NA = \frac{25\,000 \text{ €}}{(1,10)^3} = \underline{\underline{18\,782,87 \text{ €}}}$$

9. Sinulle tarjotaan sopimusta, joka tuottaa sinulle 10 000 € tulon puolentoista vuoden kuluttua tästä hetkestä. (Muuta tuloa tai menoa ei sopimuksesta aiheudu.) Miten arvokkaana pidät tuloerää, kun haluat sijoittamallasi pääomalle 10%:n vuosikoron. (Ohje: diskonttaa puolentoista vuoden yli [jatkuvan koron kaavalla].)

$$NA = \frac{10\,000 \text{ €}}{(1,10)^{1,5}} = \underline{\underline{8\,667,84 \text{ €}}}$$

Kaavoja:

Derivaatta

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Korkolasku

Yksinkertainen korkolasku. Jos korkojaksoon liittyvä korkokanta on i , ja alkupääoma K_0 kasvaa korkoa ajan $t \leq 1$ (korkojaksoa), niin kasvanut pääoma K_t on

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \quad \text{kun } 0 < t < 1.$$

Koronkorkolasku. Jos korkojaksoon liittyvä korkokanta on i , ja alkupääoma K_0 kasvaa korkoa n jakson ajan (missä n on kokonaisluku), niin loppupääoma K_n on

$$K_n = (1 + i)^n K_0, \quad \text{kun } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Jatkuva korkolasku. Jos vuosijaksoon liittyvä korkokanta on i_a , ja alkupääoma K_0 kasvaa korkoa t vuoden ajan (missä t voi olla kokonaisluku, murtoluku tai desimaaliluku), niin loppupääoma K_t on

$$\begin{aligned} K_t &= (1 + i_a)^t K_0, \quad \text{kun } t \in \mathbb{R} \\ &= e^{\rho t} K_0, \quad \text{missä } 1 + i_a = e^{\rho} \end{aligned}$$