

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

6. harjoitus, (ke 20.10.2010)

1. Yritys A valmistaa sairaalatarvikkeita. Yritys laskee saavansa toiminnasta nettotulovirran 10 000 € /kuukausi.

Yritys B arvioi pystyvänsä parempien asiakaskontaktiensa avulla parempaan tulokseen siten, että samalla tuotantokoneistolla se saisi vakiotulovirran 15 000 euroa kuukaudessa.

Alussa yritys B joutuisi tekemään 20 000 € alkuinvestoinnit markkinointiin. Onko ajateltavissa, että yritys A myisi tuotantokoneistonsa yritykselle B ja missä rajoissa myyntihinnan pitäisi olla, kun yrityksen käyttävät laskelmissaan korkointensiteettejä $\rho_A = 0.12$ ja $\rho_B = 0.14$?

$$N_{\text{lyhyarvo}}_A = \frac{K_A}{S_A} = \frac{120000 \text{ €/vuosi}}{0,12 \frac{1}{\text{vuosi}}} = \underline{\underline{1000000 \text{ €}}}$$

$$\begin{aligned} N_{\text{lyhyarvo}}_B &= -20000 \text{ €} + \frac{K_B}{S_B} \\ &= -20000 \text{ €} + \frac{180000 \text{ €/vuosi}}{0,14 \frac{1}{\text{vuosi}}} = \underline{\underline{1266000 \text{ €}}} \end{aligned}$$

Vastaus: kauppa on talentua ja
kauppa kuiti välillä 1000000 € ... 1266000 €

2. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

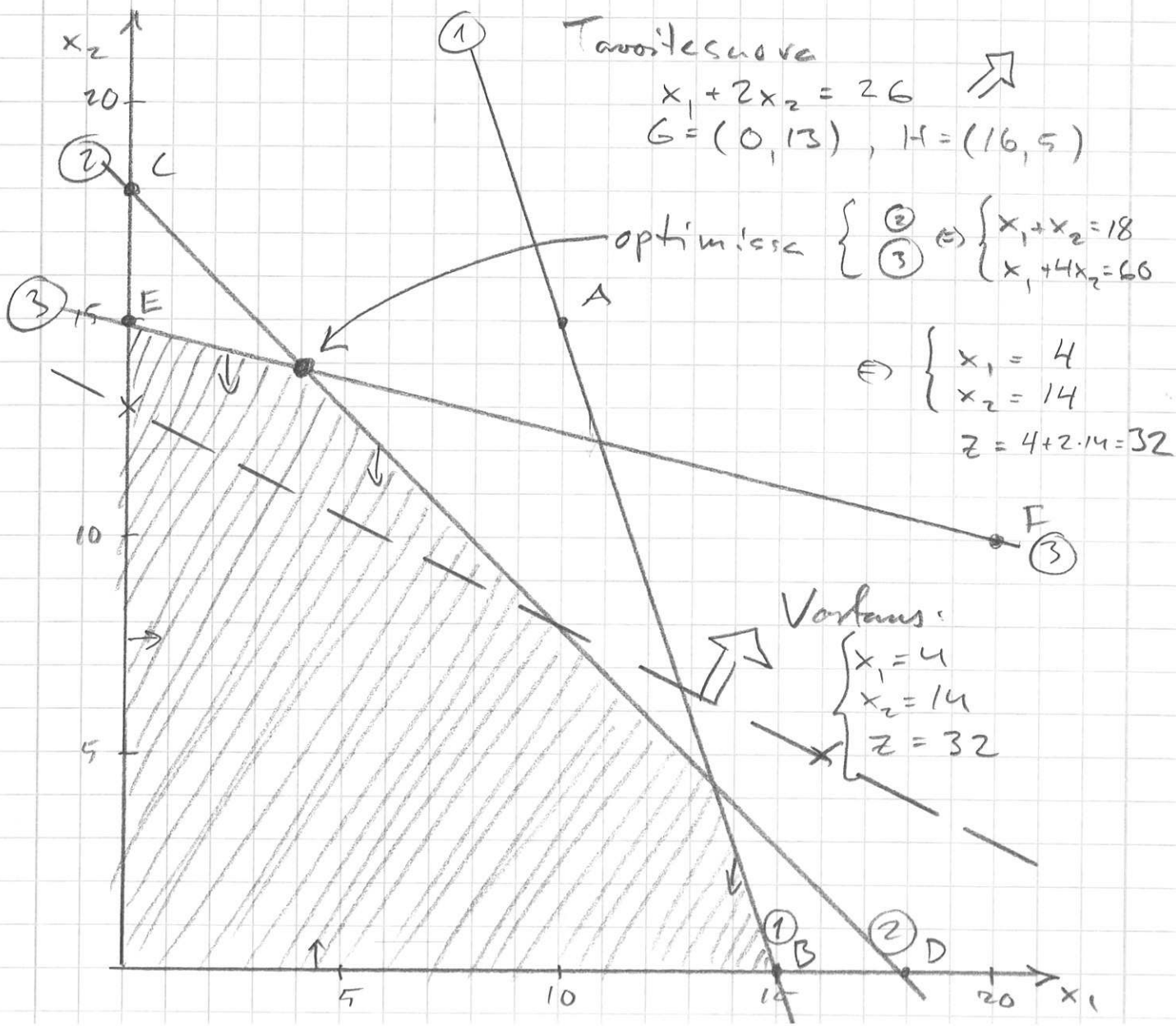
$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 45 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

rajoitteet

① $3x_1 + x_2 \leq 45 \rightarrow$ alapuoli. käyrä
 $A = (10, 15) \quad B = (15, 0)$

② $x_1 + x_2 \leq 18 \rightarrow$ alapuoli. käyrä
 $C = (0, 18) \quad D = (18, 0)$

③ $x_1 + 4x_2 \leq 60 \rightarrow$ alapuoli. käyrä
 $E = (0, 15) \quad F = (20, 10)$



3. Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään kolmella osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

tuote	tuotantoaika (tuntia)		
	os. A	os. B	os. C
1	4	2	8
2	4	4	4

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	320
B	240
C	400

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä "1"-tuotteelta on 300 € ja kate yhdeltä "2"-tuotteelta 500 €.

Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Päättös muuttujat $x_1 = \text{tuotteen 1 valmistus (kpl/vko)}$
 $x_2 = \text{tuotteen 2 valmistus (kpl/vko)}$

Tavoitefunktio $300x_1 + 500x_2$

rajoitteet

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\leq 320 & (\text{A-osasto}) \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 240 & (\text{B-osasto}) \\ 8x_1 + 4x_2 &\leq 400 & (\text{C-osasto}) \end{aligned}$$

LP-malli:

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & \begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\leq 320 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 240 \\ 8x_1 + 4x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Lindo tai glpk $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 26,67 \\ x_2 = 46,67 \\ z = 31333 \end{cases}$

4. Edellisessä tehtävässä yrityksen työaika-resurssi on 960 tuntia/viikossa eli 24 työntekijää. a) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille?
b) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos samalla, kun saadaan kaksi uutta työntekijää, on mahdollista kouluttaa vanhojakin työntekijöitä, niin miten työresurssi allokoidaan osastoille yrityksen voiton maksimoimiseksi?

a) Merkitään osastojen lisäresurssit r_A, r_B, r_C ($r_A + r_B + r_C = 80$)

$$\begin{aligned} \max x \quad & 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdot} \quad & 4x_1 + 4x_2 \leq 320 + r_A \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 240 + r_B \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 400 + r_C \\ & r_A + r_B + r_C = 80 \\ & x_1, x_2, r_A, r_B, r_C \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \max x \quad & 300x_1 + 500x_2 \\ & 4x_1 + 4x_2 - r_A \leq 320 \\ & 2x_1 + 4x_2 - r_B \leq 240 \\ & 8x_1 + 4x_2 - r_C \leq 400 \\ & r_A + r_B + r_C = 80 \\ & x_1, x_2, r_A, r_B, r_C \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lindo} \\ \text{tai glpk} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 80 \\ r_A = 0 \\ r_B = 80 \\ r_C = 0 \\ z = 40000 \end{cases}$$

4b, Kerjakan ulang dengan
 W_A, W_B, W_C ($W_A + W_B + W_C = 1040$)

$$\begin{aligned} \max & 300x_1 + 500x_2 \\ \text{dikari} & \begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\leq W_A \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq W_B \\ 8x_1 + 4x_2 &\leq W_C \end{aligned} \\ & W_A + W_B + W_C = 1040 \\ & x_1, x_2, W_A, W_B, W_C \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max & 300x_1 + 500x_2 \\ \text{dikari} & \begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 - W_A &\leq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - W_B &\leq 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - W_C &\leq 0 \end{aligned} \\ & W_A + W_B + W_C = 1040 \\ & x_1, x_2, W_A, W_B, W_C \geq 0 \end{aligned}$$

Linda }
 tangloph }

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 86,7 \\ W_A &= 347 \\ W_B &= 347 \\ W_C &= 347 \\ z &= 43377 \end{aligned} \right.$$

5. Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue.

$$\begin{array}{ll} \min z = & x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \geq 14 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

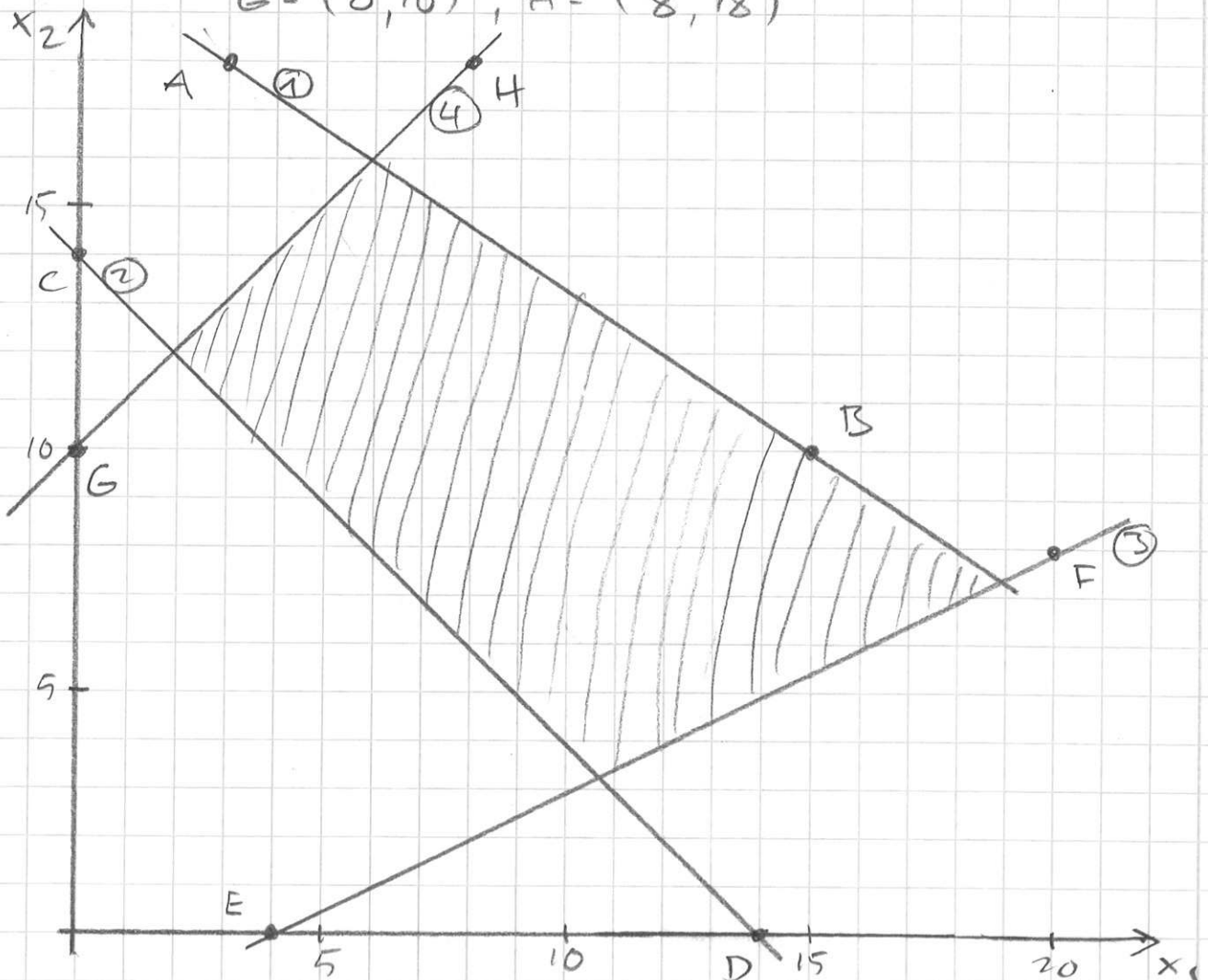
Rajoitukset

① $2x_1 + 3x_2 \leq 60$ ↓ alapuoli: käypä-
 $A = (3, 18)$, $B = (15, 10)$

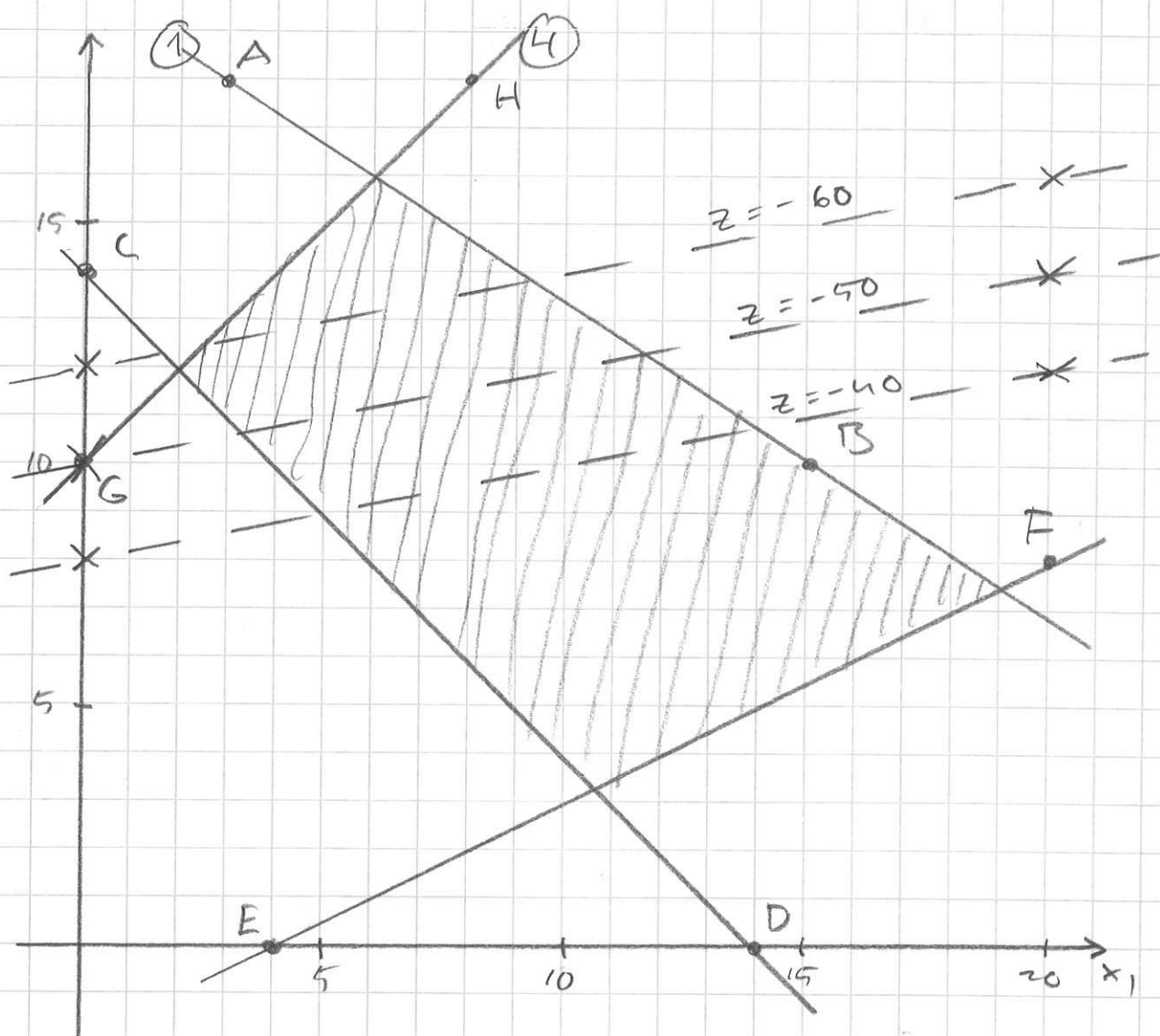
② $x_1 + x_2 \geq 14$ ↑ yläpuoli: käypä-
 $C = (0, 14)$, $D = (14, 0)$

③ $x_1 - 2x_2 \leq 4$ ↑ yläpuoli: käypä
 $E = (4, 0)$, $F = (20, 8)$

④ $-x_1 + x_2 \leq 10$ ↓ alapuoli: käypä
 $G = (0, 10)$, $H = (8, 18)$



6. a) Merkitse tehtävässä 5 piirrettyyn kuvaan pisteet, joissa tavoitefunktio saa arvon -40 ($x_1 - 5x_2 = -40$), merkitse kuvaan pisteet, joissa tavoitefunktio saa arvon -50 ($x_1 - 5x_2 = -50$) ja merkitse kuvaan pisteet, joissa tavoitefunktio saa arvon -60 ($x_1 - 5x_2 = -60$).
- b) Missä käyvän alueen pisteessä tavoitefunktio saa pienimmän mahdollisen arvonsa ja mikä se arvo on?



a)

$$x_1 - 5x_2 = -40$$

$$I = (0, 8), J = (20, 12)$$

$$x_1 - 5x_2 = -50$$

$$K = (0, 10), L = (20, 14)$$

$$x_1 - 5x_2 = -60$$

$$M = (0, 12), N = (20, 16)$$

b) rajoite suorien 1 ja 4 leikkauspiste

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ -x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 60 \\ -1 & 1 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 80 \\ -1 & 1 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow x_2 = 16 \\ \rightarrow x_1 = 6 \end{array}$$

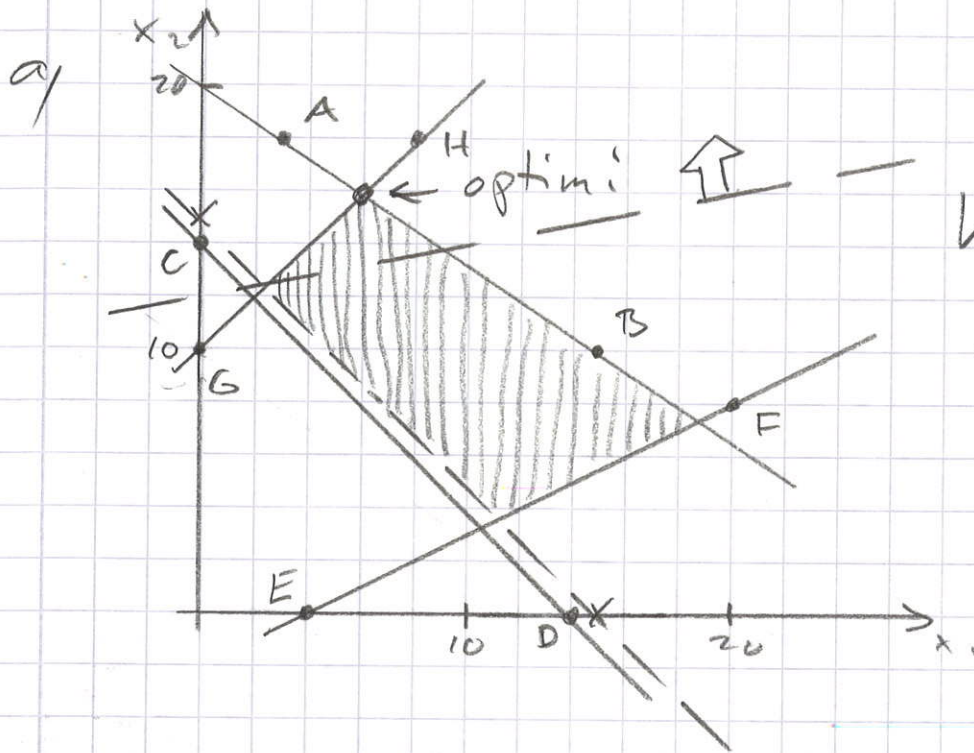
$$\therefore \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 16 \\ z = 6 - 5 \cdot 16 = -74 \end{cases}$$

7. a) Miten tehtävän 5 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

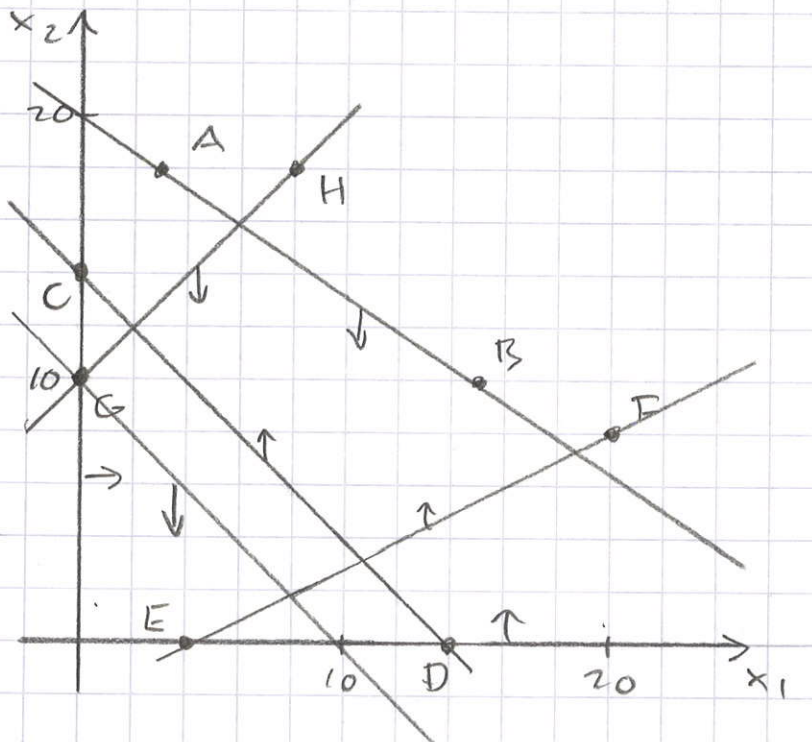
$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \leq 10$$



Käypä alue
pienempi,
mutta optimi
ei muuttunut



Käypä alue
tyhjempi
 $\Rightarrow$
ei yllätyksen
ratkaisua!