

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 3} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2$$

$$(1) \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{tarkistus } 1 + 2 = 3 \checkmark \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 \checkmark \end{array} \right)$$

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 4} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 1}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

epäyht.  $\rightarrow$  Ratkaisujoukko on tyhjä

### 3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} ① & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ ok} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ -3y = -4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 4/3$$

$$(1) \rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \rightarrow x = 1/3$$

$$\underline{\underline{V: \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 4/3 \end{cases}}}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{tarkk.} \\ 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ v.} \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ v.} \\ \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ v.} \end{array} \right)$$

### 4. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} ① & 2 & 1 & -1 \\ & 3 & 5 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y - 5z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - z & (1) \\ -y = 7 + 5z & (2) \end{cases}$$

$$\text{Olkoon } z = a$$

$$(2) \rightarrow -y = 7 + 5a \rightarrow y = -7 - 5a$$

$$(1) \rightarrow x + 2(-7 - 5a) = -1 - a \rightarrow x = 13 + 9a$$

$$\underline{\underline{V: \begin{cases} x = 13 + 9a \\ y = -7 - 5a \\ z = a \end{cases}}}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{tarkk.} \\ (13 + 9a) + 2(-7 - 5a) + a = -1 \text{ v.} \\ 3(13 + 9a) + 5(-7 - 5a) - 2a = 4 \text{ v.} \end{array} \right)$$

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltynä!) a)  $A + B$ , b)  $A + C$ , c)  $B + C$

$$a) A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{matrix} A + C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea (eri kokoiset matriisit)}$$

$$c) \begin{matrix} B + C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea ( ——— 1 ——— )}$$

7. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltynä!) a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} CA \\ 3 \times 2 \quad 3 \times 3 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$C^T A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

| tuote | A    | B    | C    |
|-------|------|------|------|
| hinta | 2.50 | 0.50 | 1.00 |

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$p = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

| tuote | A  | B  | C  |
|-------|----|----|----|
| M-os  | 20 | 30 | 0  |
| V-os  | 10 | 50 | 20 |
| S-os  | 0  | 10 | 40 |
| H-to  | 30 | 10 | 10 |

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Laske matriisilauseke  $pD^T$ . (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)

b) Onko lauseke  $pD$  järkevä (mikä sen arvo on)?

c) Onko lauseke  $Dp^T$  järkevä (mikä sen arvo on)?

d) Onko lauseke  $Dp$  järkevä (mikä sen arvo on)?

a)  $pD^T = (2,5 \ 0,5 \ 1,0) \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} = (65 \ 70 \ 45 \ 90)$   
 ostojen kokonaiskustannus osastoin

b)  $pD$   $1 \times 3$   $4 \times 3$  ei voi laskea

c)  $Dp^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$  ostot osastoin

d)  $Dp$   $4 \times 3$   $1 \times 3$  ei voi laskea