

1. Laske determinantit

a) $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -10 \end{vmatrix},$

b) $d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - 3 \cdot 2 = -10 - 6 = \underline{\underline{-16}}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$
 $= 0 - 2 \cdot (1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3) - (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3)$
 $= 0 + 20 - 7 = \underline{\underline{13}}$

2. Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \end{matrix}$$

$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 7) = 28$

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Laske excel-taulukkolaskenta-ohjelmalla a) $\det(A)$, b) A^{-1} , c) A^2 ja d) A^3 .

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			0	2	-1		
3		A=	1	-2	3		
4			3	1	-1		
5							
6	a)	<u>det(A)=</u>	13				"=MDETERM(C2:E4)"
7							
8			-0,077	0,0769	0,3077		
9	b)	$A^{-1} =$	0,7692	0,2308	-0,077		"=MINVERSE(C2:E4)"
10			0,5385	0,4615	-0,154		
11							
12			-1	-5	7		
13	c)	$A^2 =$	7	9	-10		"=MMULT(C2:E4;C2:E4)"
14			-2	3	1		
15							
16			16	15	-21		
17	d)	$A^3 =$	-21	-14	30		"=MMULT(MMULT(C2:E4;C2:E4);C2:E4)"
18			6	-9	10		
19							
20			-1	1	4		
21		$13 \cdot A^{-1} =$	10	3	-1		"=13*C8:E10"
22			7	6	-2		
23							

4. Lue "FlyBike-esimerkki". (linkki esimerkkiin löytyy kurssin verkkosivulta). Esimerkin kilpapyöräily-talli muuttaa valmennus- ja harjoittelu ohjelmaansa. Tämän seurauksena arvioidaan siirtymätodennäköisyyksien muuttuvan seuraavasti

vanha tod.näk		uusi tod.näk.
$p_{21} = 0.60$	$\rightarrow$	$p_{21} = 0.70$
$p_{11} = 0.39$	$\rightarrow$	$p_{11} = 0.29$
$p_{32} = 0.20$	$\rightarrow$	$p_{32} = 0.15$
$p_{22} = 0.75$	$\rightarrow$	$p_{22} = 0.80$

Mikä vaikutus tällä muutoksella on tallin taloudelliseen tulokseen?

$$P = \begin{pmatrix} 0,29 & 0,05 & 0,10 \\ 0,70 & 0,80 & 0,05 \\ 0,01 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$\bar{n}(k) = P \bar{n}(k-1)$$

Taulukko1

P_{old}= 0,39 0,05 0,10
 0,60 0,75 0,05
 0,01 0,20 0,85

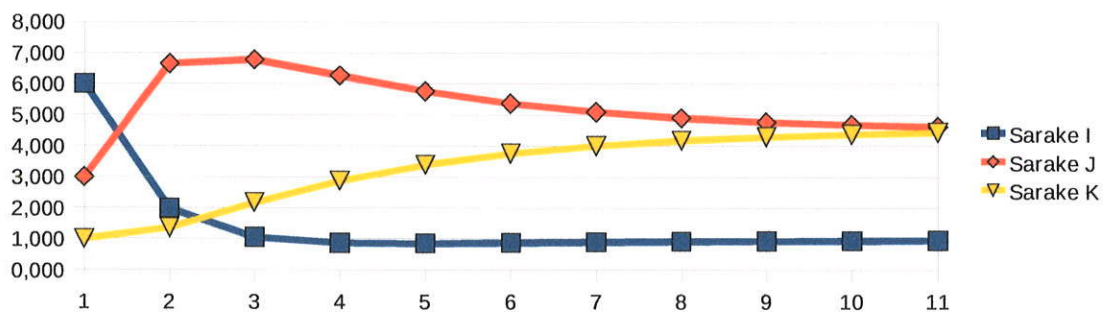
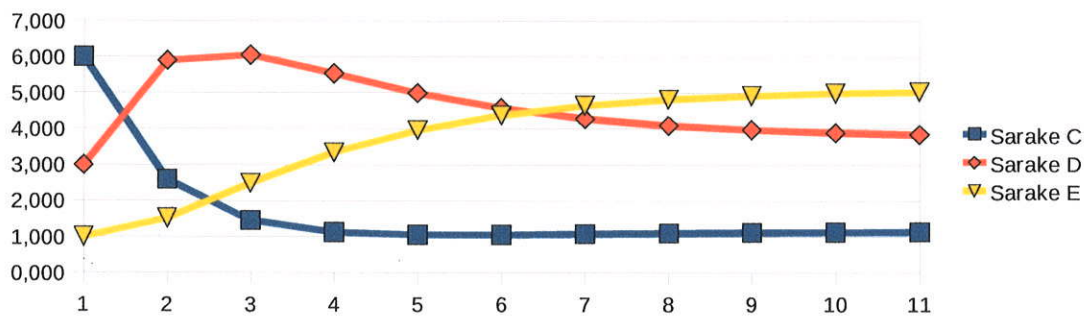
P_{uusi}= 0,29 0,05 0,10
 0,70 0,80 0,05
 0,01 0,15 0,85

k	n1(k)	n2(k)	n3(k)	R(k)
0	6,000	3,000	1,000	17800,00
1	2,590	5,900	1,510	27677,00
2	1,456	6,055	2,489	37439,83
3	1,120	5,539	3,341	44828,38
4	1,048	4,993	3,959	49892,72
5	1,054	4,571	4,374	53203,35
6	1,077	4,280	4,643	55313,54
7	1,098	4,088	4,813	56639,54
8	1,114	3,966	4,920	57465,87
9	1,125	3,889	4,986	57978,30
10	1,132	3,841	5,027	58295,13

k	n1(k)	n2(k)	n3(k)	R(k)
0	6,000	3,000	1,000	17800,00
1	1,990	6,650	1,360	27497,00
2	1,046	6,781	2,173	35609,68
3	0,860	6,265	2,875	41538,62
4	0,850	5,758	3,392	45692,11
5	0,874	5,371	3,755	48558,83
6	0,897	5,096	4,007	50526,68
7	0,916	4,905	4,179	51874,78
8	0,929	4,774	4,297	52797,63
9	0,938	4,684	4,378	53429,18
10	0,944	4,623	4,433	53861,35

NPV= 308 855,74 €

NPV= 287 991,39 €



5. Määritä adjungaattikaavan avulla käänteismatriisit matriiseille

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= (4 - 15) - 2(1 - 6) - (5 - 8) = -11 + 10 + 3 = 2$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} +|M_{11}| & -|M_{21}| & +|M_{31}| \\ -|M_{12}| & +|M_{22}| & -|M_{32}| \\ +|M_{13}| & -|M_{23}| & -|M_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +(-11) & -(7) & +(10) \\ -(-5) & +(3) & -(4) \\ +(-3) & -(1) & +(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5,5 & -3,5 & 5 \\ 2,5 & 1,5 & -2 \\ -1,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +|M_{11}| & -|M_{21}| \\ -|M_{12}| & +|M_{22}| \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

6. Käyttämällä edellä laskettua käänteismatriisia ratkaise yhtälöryhmä

$$M(x, y, z)^T = (3, 1, 2)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,5 & -3,5 & 5 \\ 2,5 & 1,5 & -2 \\ -1,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vastaus: $x = -10, y = 5, z = -3$

Tarkistus:

$$\begin{aligned} -10 + 2 \cdot 5 - (-3) &= 3 \quad \checkmark \\ -10 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) &= 1 \quad \checkmark \\ 2 \cdot (-10) + 5 \cdot 5 + (-3) &= 2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

7. Jos edellisen tehtävän yhtälöryhmän ensimmäisen yhtälön RHS kasvaa yhdellä (arvosta 3 arvoon 4), niin miten paljon muuttuu yhtälöryhmän ratkaisuvektori $(x, y, z)^T$? Voitko tunnistaa nämä luvut matriisin M käänteismatriisista?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = M^{-1} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,5 & -3,5 & 5 \\ 2,5 & 1,5 & -2 \\ -1,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,5 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Ratkaisun muutos on M^{-1} :n 1. sarakke ∇