

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu A :n käänteismatriisi on oikein.
Siis tarkista, että seuraavat ovat totta

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ok$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ok$$

c) Ratkaise tämän tiedon avulla x ja y yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vastaus } \begin{cases} x = 8 \\ y = -13 \end{cases}$$

$$\left(\text{tarkistus } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \right)$$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina $(x_0 \ y_0)^T$. Merkitään vektorilla $(x_1 \ y_1)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla $(x_2 \ y_2)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$(1) \quad A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix}$$

Laske vektorit $(x_1 \ y_1)^T$ ja $(x_2 \ y_2)^T$.

Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin A käänteismatriisi A^{-1} on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (2) ja (3) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on A^{-1} kertaa RHS".

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3. a) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (2), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = A^{-1}:n 1. sarakke$$

b) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (3), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista A^{-1} ?

b) $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{-1}\text{in 2. sarakke}$

c) Muutosvektorit ovat A^{-1} in sarakkeet.

4. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) :(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Määritä determinantti matriisille

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = -2$$

6. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ratkaise matriisi X yhtälöstä

$$2(X - A) = (Q - A)$$

$$\begin{aligned} 2(X - A) &= Q - A \\ 2X - 2A &= Q - A \\ 2X &= Q - A + 2A \\ 2X &= Q + A \\ X &= \frac{1}{2}(Q + A) \end{aligned}$$

$$\rightarrow X = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

7. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & -20 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 1/2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -4z & (1) \\ y = 2z & (2) \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{Valitaan } z = 3 \\ &(2) \rightarrow y = 6 \\ &(1) \rightarrow 3x - 3 \cdot 6 = -4 \cdot 3 \rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Varh. $x = 2, y = 6, z = 3$