

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**9. harjoitus**, (la 4.12.2010)

1. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Laske matriisilauseke $\mathbf{pD}^T$.

b) Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{pD}^T &= \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 65 & 70 & 45 & 90 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Esimerkkinä vastaukseksi saadun vektorin alkio (1, 2) saadaan seuraavasti

$$\begin{aligned} (\mathbf{pD}^T)_{12} &= \left[\begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} \right]_{12} \\ &= 2.5 \cdot 10 \quad (\text{A:n hinta} \times \text{V-osaston ostamat A:t}) \\ &\quad + 0.5 \cdot 50 \quad (\text{B:n hinta} \times \text{V-osaston ostamat B:t}) \\ &\quad + 1.0 \cdot 20 \quad (\text{C:n hinta} \times \text{V-osaston ostamat C:t}) \\ &= 70 \quad (\text{V-osaston ostojen kokonaissumma}) \end{aligned}$$

2. Olkoon $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{D}$ samat matriisit kuin edellisessä tehtävässä.

- a) Onko lauseke $\mathbf{pD}$ järkevä (mikä sen arvo on)?
- b) Onko lauseke $\mathbf{Dp}^T$ järkevä (mikä sen arvo on)?
- c) Onko lauseke $\mathbf{Dp}$ järkevä (mikä sen arvo on)?

a) $(1 \times 3) \cdot (4 \times 3)$ ei voi laskea!

b) $(4 \times 3) \cdot (3 \times 1)$ voi laskea ja tulo on (4×1) :

$$\mathbf{Dp}^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

c) $(4 \times 3) \cdot (1 \times 3)$ ei voi laskea!

4. a) Laske determinantti matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

b) millä vakion a arvolla käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ ei ole olemassa?

a)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} &= +a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= a \cdot (1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 5) + 3 \cdot (1 \cdot (-3) - 0) + 0 \\ &= 2a - 9 \end{aligned}$$

b)

$\mathbf{A}^{-1}$ ei ole olemassa

$$\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 4.5$$

5. a) Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1000x & - & 3y & & = & 0 \\ & x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & & 3y & - & 3z & = & 7 \end{cases}$$

b) Tarkista ratkaisu sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöryhmään.

$$D = \begin{vmatrix} 1000 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -3 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 \\ \mathbf{7} & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 - (-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 = 3 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 1000 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & \mathbf{2} & -1 \\ 0 & \mathbf{7} & -3 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 1000 \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 1000 & -3 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & 3 & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1021
\end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_1}{D} = \frac{3}{-9} = -0.333 \\
y &= \frac{D_2}{D} = \frac{1000}{-9} = -111.111 \\
z &= \frac{D_3}{D} = \frac{1021}{-9} = -113.444
\end{aligned}$$

Tarkistus:

$$\begin{aligned}
1000 \cdot \left(\frac{-3}{9}\right) - 3 \cdot \left(\frac{-1000}{9}\right) &= 0 \quad \text{ok} \\
\frac{-3}{9} + \left(\frac{-1000}{9}\right) - \left(\frac{-1021}{9}\right) &= 2 \quad \text{ok} \\
3 \left(\frac{-1000}{9}\right) - 3 \left(\frac{-1021}{9}\right) &= 7 \quad \text{ok}
\end{aligned}$$

6. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\
&= -2 + 12 - 3 = 7
\end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{-7} & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 \\ \mathbf{0} & 9 & -20 \end{vmatrix} = +(-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-7} & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 \\ 3 & \mathbf{0} & -20 \end{vmatrix} = -(-7) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} = 42$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \mathbf{-7} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 3 & 9 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = +(-7) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 21$$

Vastaus:

$$\begin{aligned}x &= \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2 \\y &= \frac{D_2}{D} = \frac{42}{7} = 6 \\z &= \frac{D_3}{D} = \frac{21}{7} = 3\end{aligned}$$

Tarkistus

$$\begin{array}{rclcl}2 & - & 2 \cdot 6 & + & 3 & = & -7 & \text{ok} \\ & & 6 & - & 2 \cdot 3 & = & 0 & \text{ok} \\ 3 \cdot 2 & + & 9 \cdot 6 & - & 20 \cdot 3 & = & 0 & \text{ok}\end{array}$$

7. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

Muutama huomio: (1) Cramerin kaavat eivät nyt auta! (2) Kerroinmatriisin determinantti on 0, joten jos ratkaisuja on olemassa, niin niitä on ääretön määrä.

Tutkimme yhtälöryhmän Gaussin eliminointimenetelmällä:

$$\begin{aligned}& \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & -20 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \leftarrow - \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 12 \\ \leftarrow - \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -4z & (1) \\ y = 2z & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

Jos asetamme $z = 3a$, missä a saa olla mikä tahansa reaaliluku, niin

$$\begin{aligned}(2) &\rightarrow y = 2 \cdot 3a = 6a \\ (1) &\rightarrow 3x - 3 \cdot 6a = -4 \cdot 3a \rightarrow x = 2a\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2a$, $y = 6a$ ja $z = 3a$, missä $a \in \mathbb{R}$ voidaan valita vapaasti.

Tarkistus

$$\begin{array}{rclcl}3 \cdot 2a & - & 3 \cdot 6a & + & 4 \cdot 3a & = & 0 & \text{ok} \\ & & 6a & - & 2 \cdot 3a & = & 0 & \text{ok} \\ 3 \cdot 2a & + & 9 \cdot 6a & - & 20 \cdot 3a & = & 0 & \text{ok}\end{array}$$

8. "FlyBike" esimerkissä (ks. verkkosivu ja harjoituksen 8 tehtävä 4) uusi jakauman odotusarvo $\vec{n}_{k+1}$ saadaan edellisen jakson jakauman odotusarvosta kaavalla

$$\vec{n}_{k+1} = \mathbf{P}\vec{n}_k.$$

Kun dynamiikan yhtälöä toistetaan riittävän monta kierrosta, alkavat arvot vakiintua kohden tasapainoratkaisua $\vec{n}$, jolle on voimassa

$$\mathbf{P}\vec{n} = \vec{n}$$

Ratkaise tasapainojakaumat ennen ja jälkeen harjoituksessa 8 (tehtävä 4) kuvattua valmennusmenetelmien muutosta.

Ratkaistavat yhtälöryhmät ovat siis

$$\mathbf{P}_1\vec{n} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.39n_1 + 0.05n_2 + 0.10n_3 = n_1 \\ 0.60n_1 + 0.75n_2 + 0.05n_3 = n_2 \\ 0.01n_1 + 0.20n_2 + 0.85n_3 = n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases}$$

ja

$$\mathbf{P}_2\vec{n} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.29n_1 + 0.05n_2 + 0.10n_3 = n_1 \\ 0.70n_1 + 0.80n_2 + 0.05n_3 = n_2 \\ 0.01n_1 + 0.15n_2 + 0.85n_3 = n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases}$$

Miten arvokkaat kassavirrat ovat sen jälkeen kun tasapaino on saavutettu tasapaino. (Laskentakorko 10% (tod.vuosikorko) korkojaksona vuosi.)

Ratkaistaan ensin tasapainojakauma ennen muutosta:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0.39n_1 + 0.05n_2 + 0.10n_3 = n_1 \\ 0.60n_1 + 0.75n_2 + 0.05n_3 = n_2 \\ 0.01n_1 + 0.20n_2 + 0.85n_3 = n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -0.61n_1 + 0.05n_2 + 0.10n_3 = 0 & \cdot 1 \\ 0.60n_1 + -0.25n_2 + 0.05n_3 = 0 & \cdot 1 \\ 0.01n_1 + 0.20n_2 + -0.15n_3 = 0 & \leftarrow + \quad \leftarrow + \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} -0.61 & 0.05 & 0.10 & 0 \\ 0.60 & -0.25 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0.61 & 0.05 & 0.10 & 0 \\ 0.60 & -0.25 & 0.05 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -0.61 & 0.05 & 0.10 \\ 0.60 & -0.25 & 0.05 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.2405 \\ D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0.05 & 0.10 \\ 0 & -0.25 & 0.05 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.275 \end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -0.61 & 0 & 0.10 \\ 0.60 & 0 & 0.05 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0.905$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -0.61 & 0.05 & 0 \\ 0.60 & -0.25 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 1.225$$

$$n_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0.275}{0.2405} = 1.14$$

$$n_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0.905}{0.2405} = 3.76$$

$$n_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1.225}{0.2405} = 5.09$$

Vuositulo = $1.14 \cdot 300 + 3.76 \cdot 2000 + 5.09 \cdot 10000 = 58762$ (euroa).
 NPV = 587 620 (euroa) (laskentakorkona tod.vk. 10%)

Ratkaistaan toiseksi tasapainojakauma muutoksen jälkeen:

$$\begin{cases} 0.29n_1 + 0.05n_2 + 0.10n_3 = n_1 \\ 0.70n_1 + 0.80n_2 + 0.05n_3 = n_2 \\ 0.01n_1 + 0.15n_2 + 0.85n_3 = n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0.71n_1 + 0.05n_2 + 0.10n_3 = 0 & \cdot 1 \\ 0.70n_1 + -0.20n_2 + 0.05n_3 = 0 & \cdot 1 \\ 0.01n_1 + 0.15n_2 + -0.15n_3 = 0 & \leftarrow + \quad \leftarrow + \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0.71 & 0.05 & 0.10 & 0 \\ 0.70 & -0.20 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0.71 & 0.05 & 0.10 & 0 \\ 0.70 & -0.20 & 0.05 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

$$D = \begin{vmatrix} -0.71 & 0.05 & 0.10 \\ 0.70 & -0.20 & 0.05 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.235$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0.05 & 0.10 \\ 0 & -0.20 & 0.05 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.225$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -0.71 & 0 & 0.10 \\ 0.70 & 0 & 0.05 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1.055$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -0.71 & 0.05 & 0 \\ 0.70 & -0.20 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 1.070$$

$$n_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0.225}{0.235} = 0.96$$

$$n_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1.055}{0.235} = 4.49$$

$$n_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1.070}{0.235} = 4.55$$

Vuositulo = $0.96 \cdot 300 + 4.49 \cdot 2000 + 4.55 \cdot 10000 = 54768$ (euroa).

NPV = 547 680 (euroa) (laskentakorkona tod.vk. 10%)

Johtopäätös: Valmennusohjelman muutosta ei kannata tehdä.