

10.2 Aritmeettinen ja geometrinen sarja

Sarja on äärellisen monen termin merkitty summa

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^5 10k = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$

$$\sum_{k=1}^5 (2k+1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$$

Sarja on aritmeettinen sarja, jos peräkkäisten termien erotus on vakio. Esimerkkejä aritmeettisista sarjoista ovat

a) $\sum_{k=1}^6 (2 + (k-1)5) = 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27$

b) $\sum_{k=1}^6 (2 + 5k) = 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + 32$

c) $\sum_{k=1}^6 (5k - 3) = 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27$

d) $\sum_{k=0}^5 (2 + 5k) = 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27$

Aritmeettinen sarja on helpointa määritellä ilmoittamalla termien määrä n , ensimmäinen termi u_1 ja viimeinen termi u_n . Toinen tapa on ilmoittaa termien määrä n , ensimmäinen termi u_1 ja peräkkäisten termien erotus d (, jolloin $u_n = u_1 + (n-1)d$).

Aritmeettisen sarjan summa on

$$\sum_{k=1}^n u_k = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} \quad ("n \text{ kertaa ensimmäisen ja viimeisen keskiarvo}")$$

Todistus: Lasketaan ensin $S = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

$$\begin{array}{rcccccc} S & = & 1 & +2 & +3 & \cdots & +n \\ S & = & n & +(n-1) & +(n-2) & \cdots & +1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & +(n+1) & +(n+1) & \cdots & +(n+1) \end{array}$$

Siis $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum (u_1 + (k-1)d) = \sum u_1 + d \sum (k-1) = n \cdot u_1 + (d \sum k) - nd \\ &= n \cdot \left(u_1 + \frac{(n+1)d}{2} - d \right) = n \cdot \frac{u_1 + (u_1 + (n-1)d)}{2} = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} \quad \square\end{aligned}$$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^7 (3k-1) = 7 \cdot \frac{2+20}{2} = 77$

Sarja on geometrinen sarja, jos peräkkäisten termien suhde on vakio. Esimerkkejä geometrisista sarjoista ovat

$$\begin{aligned}\text{a) } \sum_{k=1}^6 2^k &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \\ \text{b) } \sum_{k=1}^3 2 \cdot 3^k &= 6 + 18 + 54\end{aligned}$$

Geometrinen sarja on helpointa määritellä ilmoittamalla termien määrä n , ensimmäinen termi u_1 ja peräkkäisten termien suhde q , jolloin sarja on

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_1 q^{(k-1)} = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{(n-1)}$$

Geometrisen sarjan summa on

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{(n-1)} = \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

Todistus:

$$\begin{aligned}S &= u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{(n-1)} \\ -Sq &= -u_1 q - u_1 q^2 - u_1 q^3 - u_1 q^4 - \dots - u_1 q^n\end{aligned}$$

$$S(1 - q) = u_1(1 - q^n)$$

□

Esimerkki: $\sum_{k=1}^4 3 \cdot 2^k = 6 \cdot \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 80$.

$$\sum_{k=1}^{100} 5 \left(\frac{1}{10} \right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^{100}}{1 - \frac{1}{10}} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{5}{9}$$

Jos $|q| < 1$, niin ärettömän geometrisen sarjan summa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^4 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

Todistus: Jos $|q| < 1$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q}$ $\square$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$