

10.5 Jaksolliset suoritukset

Tarkastellaan tilannetta, jossa asiakas tallettaa pankkitilille toistuvasti yhtäsuuren rahasumman k aina korkojakson lopussa. Asiakas suorittaa talletuksen n kertaa. Lasketaan tilillä oleva pääoma n :nnen jakson lopussa. Olkoon korkotekijä $r = 1 + i$, silloin kasvanut pääoma on

$$\begin{aligned}
 1. \text{ jakson lopussa} \quad K_1 &= k \\
 2. \text{ jakson lopussa} \quad K_2 &= k + rK_1 = k + rk \\
 3. \text{ jakson lopussa} \quad K_3 &= k + rK_2 = k + rk + r^2k \\
 &\vdots \\
 n. \text{ jakson lopussa} \quad K_n &= k + rK_{n-1} = k + rk + r^2k + \dots + r^{n-1}k \quad (\text{geom. sarja !})
 \end{aligned}$$

Kasvanut pääoma n . jakson lopussa saadaan siis geometrisen sarjan summana

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{k(1-r^n)}{1-r} = \frac{k(r^n-1)}{r-1} \\
 &= k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\
 &= k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi laskemme, miten suuri alkupääoma K_0 pitää tilille tallettaa 1. jakson alussa, jotta pääoma (ilman muita talletuksia) olisi n . jakson lopussa K_n eli sama kuin jaksollisten talletusten tapauksessa. Tarvittava alkupääoma saadaan diskonttaamalla loppupääoma K_n

1. jakson alkuun eli

$$\begin{aligned}
 K_0 &= v^n K_n = \frac{1}{(1+i)^n} K_n \\
 &= k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}
 \end{aligned}$$

Sanomme, että K_n on jaksollisen maksusarjan arvo n . jakson lopussa eli n . jakson loppuun prolongoitu arvo. Vastaavasti K_0 on jaksollisen maksusarjan arvo 1. jakson alussa eli 1. jakson alkuun diskontattu arvo.

Merkitään

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \text{jakson lopussa suoritetettujen yhtäsuurten maksujen}$$

prolongointitekijä

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \text{jakson lopussa suoritetettujen yhtäsuurten maksujen}$$

diskonttaustekijä

jolloin

$$\text{pääoma } n. \text{ jakson lopussa} = K_n = k \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$\text{maksusarjan nykyarvo} = K_0 = k \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Esimerkki 10.5.1: Asiakas aikoo säästää 10 vuoden ajan siten, että jokaisen vuoden lopussa hän tallettaa säästötilille saman suuruisen rahamäärän k . Asiakkaan tavoite on, että 10. vuoden lopussa tilillä on 100 000 mk. Miten suuri tulee kertatalletuksen k olla, kun tilille maksettava korko on 10 % p.a.?

Nyt siis $n = 10$, $K_n = K_{10} = 100\,000$ mk ja $i = 0,10$.

$$\begin{aligned} K_n &= k \cdot s_{\overline{n}|i} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \cdot K_n \\ &\Leftrightarrow \quad k = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot K_n \\ &\Leftrightarrow \quad k = \frac{0,10}{1,10^{10} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 6\,274,55 \text{ mk} \end{aligned}$$

Annuiteettilaina.

Asiakas lainaa pankista summan K_0 ja kuolettaa lainan maksamalla n kertaa samansuuruinen kuoletuserän, annuiteetin k . Annuiteetit maksetaan aina korkojakson lopussa ja se osa annuiteetista, joka ylittää koron, lyhentää lainaa. Sitä mukaa kun korko vähenee kasvaa lyhennyksen osuus kuoletuserästä. Seuraava taulukko kuvaa annuiteettilainan hoitoa, kun korkokanta on i ja korkotekijä $r = 1 + i$

korko-jakso	lainan määrä jakson alussa	korko	lyhennys	lainan määrä jakson lopussa
1	K_0	iK_0	$k - iK_0$	$K_0 - (k - iK_0) = rK_0 - k$
2	$K_1 = rK_0 - k$	iK_1	$k - iK_1$	$K_1 - (k - iK_1) = rK_1 - k$
3	$K_2 = rK_1 - k$	iK_2	$k - iK_2$	$K_2 - (k - iK_2) = rK_2 - k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

eli

korko-jakso	lainan määrä jakson lopussa
1	$rK_0 - k$
2	$rK_1 - k = r^2K_0 - rk - k$
3	$rK_2 - k = r^3K_0 - r^2k - rk - k$
$\vdots$	$\vdots$
n	$rK_{n-1} - k = r^nK_0 - r^{n-1}k - r^{n-2}k - \dots - rk - k$ $= r^nK_0 - \left(k \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \right) = 0$

Laina tulee kuoletettua n jakson kuluessa, jos

$$\begin{aligned}
 r^n K_0 - \left(k \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \right) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{(1-r)r^n}{1-r^n} K_0 \\
 &\Leftrightarrow \quad k = \frac{(r-1)r^n}{r^n-1} K_0 \\
 &\Leftrightarrow \quad k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} K_0
 \end{aligned}$$

Saamme seuraavan tuloksen

Jos annuiteetilainan määrä on K_0 , korkojaksojen lukumäärä n ja korkokanta i , niin

$$\text{kuoletuserä} = k = c_{n|i} \cdot K_0,$$

missä

$$\text{kuoletuskerroin } c_{\overline{n}|i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Esimerkki 10.5.2: Asiakas ottaa 100 000 mk:n annuiteetilainan. Laina-aika on 10 vuotta ja korko 10 %. Mikä on kuoletuserä, kun lainaa lyhennetään kerran vuodessa?

$$k = c_{\overline{n}|i} \cdot K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 = \frac{0,10 \cdot (1,10)^{10}}{(1,10)^{10} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 16\,274,55 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.5.3: Lyhennetään edellisen esimerkin lainaa kuukausittain. Silloin korkojaksoja on $n = 120$ ja korkokanta on $\frac{0,10}{12}$. Siis

$$k = c_{\overline{n}|i} \cdot K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 = \frac{\frac{0,10}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120}}{\left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 1321,51 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.5.4: Asiakas lainaa pankista 100 000 mk ja sopii maksavansa lainan korkoineen 10 vuoden kuluttua (korko 10 %). Selviytyäkseen lainan maksusta hän alkaa välittömästi säästää. Hän avaa tilin (jonka korko on 10 %) ja alkaa tallettaa kuukausittain tilille tasaerän k siten, että 10 vuoden kuluttua hän kasvaneella pääomalla maksaa lainan pois. Määritä k .

Merkitään lainan määrää K_0 :lla. Korkojaksojen määrä on $12 \cdot 10 = 120$ ja kuukausittainen korkokanta on $i = 0,10/12$. Esimerkin 10.5.1 mukaisesti

$$\begin{aligned} k \cdot s_{\overline{n}|i} &= K_n = r^n K_0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{r^n}{s_{\overline{n}|i}} K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} K_0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\frac{0,10}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120}}{\left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 1321,51 \text{ mk} \end{aligned}$$

Osamaksukauppa.

Tarkastellaan kauppaa, jossa asiakas ostaa tavarán, jonka káteishinta on H . Kauppias ja asiakas sopii, että kaupantekohetkellä suoritetaan käsiraha h ja sen jälkeen n kertaa kuukauden válein osamaksuerä k . Vuotuinen nimelliskorko on $p\%$.

Periaatteessa erás tapa hoitaa käytännön järjestelyt on seuraava. Kauppias ottaa pankista osamaksuvelkaa $K_0 = H - h$ vastaavan annuiteettilainan, ja asiakas kuolettaa lainan osamaksuilla. Siis

$$k = c_{n|i} K_0 = c_{n|i} (H - h), \quad \text{missä } i = \frac{p}{12 \cdot 100}$$

Käytännössä lainan järjestävä rahoitusyhtiö perii osamaksulisán m , joka sisältää korvauksen vakuusprovisiosta (n. 3 - 5 % osamaksuvelasta), luottoriskistä (n. 1 - 2 % osamaksuvelasta), luottotieto-, lomake-, ym. kustannukset sekä liikevaihtovero. Siis

$$k = c_{n|i} (K_0 + m) = c_{n|i} (H - h + m)$$

Esimerkki 10.5.5: Asiakas ostaa auton, jonka káteishinta olisi 40 000 mk, osamaksulla siten, että käsiraha on 20%, laina-aika 18 kk ja osamaksulisä 2 000 mk. Vuotuinen nimelliskorko on 16 % ja osamaksut ja korko suoritetaan kuukausittain.

Käsiraha on siis $h = 0,20 \cdot 40\,000 \text{ mk} = 8\,000 \text{ mk}$. Osamaksuilla kuolettettavan lainan määrä on $H - h + m = 40\,000 \text{ mk} - 8\,000 \text{ mk} + 2\,000 \text{ mk} = 34\,000 \text{ mk}$. Osamaksuerä (korkojaksoja) on 18 kappaletta ja korkokanta on $i = 0,16/12$.

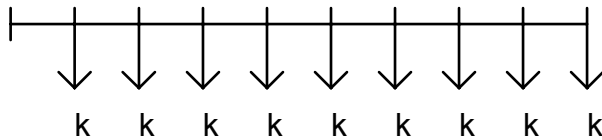
$$k = c_{n|i} (H - h + m) = c_{18|\frac{0,16}{12}} \cdot 34\,000 \text{ mk} = \frac{\frac{0,16}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{18}}{\left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{18} - 1} \cdot 34\,000 \text{ mk} = 2137,15 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.5.6: Asiakas ostaa veneen maksaen käsirahan 4 000 mk ja kuukausittain osamaksuerán 1 400 mk vuoden ajan. Osamaksulisä on 1 200 mk ja vuotuinen nimelliskorko on 15 %. Laske káteishinta.

$$k = c_{n|i} (H - h + m) \Leftrightarrow H = \frac{1}{c_{n|i}} \cdot k + h - m$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} - 1}{\frac{0,15}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12}} \cdot 1400 \text{ mk} + 4000 \text{ mk} - 1200 \text{ mk} = 18\,310,66 \text{ mk}$$

Yhteenveto:



$$K_n = s_{\overline{n}|i} \cdot k \qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \text{prolongointitekijä}$$

$$K_0 = a_{\overline{n}|i} \cdot k \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad \text{diskonttaustekijä}$$

$$k = c_{\overline{n}|i} \cdot K_0 \qquad c_{\overline{n}|i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \qquad \text{kuoletustekijä}$$