

Kompleksianalyysi ja integraalimuunnokset

Seppo Hassi

Syksy 2016

ESIPUHE

Tämä on Kompleksianalyysi ja integraalimuunnokset -kurssille laadittu opetusmoniste, jonka sisältö perustuu Vaasan yliopistossa luennoimiini integraalimuunnosten ja kompleksianalyysin kursseihin. Moniste sisältää myös aikaisempien Integraalimuunnokset I & II-kurssien luentomateriaalin. Sisältö on jaettu kahteen osaluueeseen niin, että monisteen alkuosa käsittelee integraalimuunnosten tarvitsemia kompleksianalyysin apuvälineitä ja loppuosa varsinaisia integraalimuunnoksia.

Esitän kiitokseni *H.L. Wietsma:lle* (Vaasan yliopisto, matemaattisten tieteiden yksikkö), joka on suorittanut tekstin puhtaaksikirjoituksen LaTeX-muotoon ja piirtänyt eräisiin esimerkkeihin liittyvät kuvat.

Vaasassa 31. elokuuta 2016

Seppo Hassi

SISÄLLYSLUETTELO

Esipuhe	iii
Sisällysluettelo	v
1 Kompleksiluvuista ja kompleksifunktioista	1
1.1 Peruskäsitteitä trigonometrisista funktioista – kertausta	1
1.2 Kompleksiluvut	2
1.3 Eräitä kompleksifunktioita	9
1.4 Jatkuvuus ja derivoituvuus	14
2 Kompleksinen integrointi	19
2.1 Käyräintegraali kompleksitasossa	19
2.2 Cauchy’n integraalilause ja integraalikaava	21
3 Sarjakehitelmistä kompleksialueessa	25
3.1 Potenssisarjat kompleksialueessa	25
3.2 Laurentin sarja	27
3.3 Residy lause	31
3.3.1 Residyn laskeminen m -kertaisessa navassa	33
3.3.2 Residy-lauseen sovelluksia	34
3.3.3 Rationaalifunktion epäoleellinen integraali	34
4 Laplace-muunnos	37
4.1 Laplace-muunnoksen määritelmä	37
4.2 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia	38
4.2.1 Derivaatan Laplace-muunnos	39
4.2.2 Integraalin Laplace-muunnos	40
4.2.3 Laplace-muunnoksen derivaatta ja integraali	41
4.2.4 Jaksollisen funktion Laplace-muunnos	42
4.2.5 Konvoluution Laplace-muunnos	43
4.2.6 Raja-arvo-ominaisuuksia	44
4.3 Laplace-käänteismuunnos ja yhteys Fourier-muunnokseen	44
4.3.1 Laplace-käänteismuunnoksen laskeminen	45
4.3.2 Residy-menetelmä	46
4.4 Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksella	47
4.5 Integraaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksella	51
4.6 Siirtofunktio	53
5 Vektori- ja sisätuloavaruudet	55
5.1 Sisätuloavaruus	56

6	Fourier-sarjat	63
6.1	Fourier-kertoimet	63
6.2	Fourier-sarjan suppeneminen	68
6.3	Kompleksiset Fourier-sarjat	71
7	Fourier-muunnos	77
7.1	Fourier-muunnoksen määritelmä ja käänteismuunnos	77
7.2	Laplace- ja Fourier-muunnoksen välinen yhteys	79
7.3	Fourier-muunnoksen ominaisuuksia	79
7.4	Derivaatan Fourier-muunnos	80
7.5	Konvoluutio	82
7.6	Eräiden funktioiden Fourier-muunnoksia	82
7.7	Sovellus differentiaaliyhtälöihin	86
7.8	Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)	87
8	$\mathcal{Z}$-muunnos	91
8.1	$\mathcal{Z}$ -muunnos ja sen käänteismuunnos	91
8.2	$\mathcal{Z}$ -muunnoksen ominaisuuksia	93
8.3	Differenssiyhtälöiden ratkaiseminen $\mathcal{Z}$ -muunnoksella	95
A	Fourier-Muunnoskaavoja	99
A.1	Fourier-sarja	99
A.2	Fourier-muunnos	100
A.3	Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)	100
B	Laplace-Muunnoskaavoja	103
C	$\mathcal{Z}$-Muunnoskaavoja	105
D	Kompleksi analyysi	107
	Kirjallisuus	109

Luku 1: KOMPLEKSILUVUISTA JA KOMPLEKSIFUNKTIOISTA

1.1 Peruskäsitteitä trigonometrisista funktioista – kertausta

Seuraavat sini- ja kosini-funktioiden laskukaavat tulevat usein käyttöön:

Sinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x - y) &= \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)\end{aligned}$$

Kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \\ \cos(x - y) &= \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)\end{aligned}$$

yhteys: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ ja $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$.

Sinien summaa ja erotusta koskevat kaavat

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin(x) - \sin(y) &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Kosinien summaa ja erotusta koskevat kaavat

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(y) &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Peruskaava: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Määritelmä 1.1.1. Funktio f on *parillinen*, jos

$$f(-x) = f(x), \quad x \in M_f$$

ja funktio f on *pariton*, jos

$$f(-x) = -f(x), \quad x \in M_f.$$

Parillisen reaalifunktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen, parittoman reaalifunktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen.

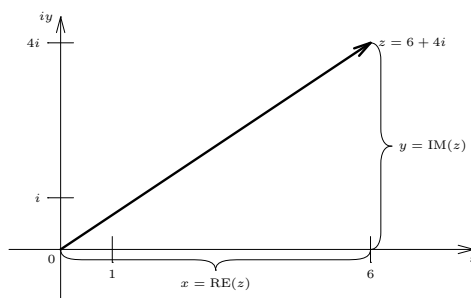
Esimerkki 1.1.2. $\cos(x)$ on parillinen funktio. Vastaavasti $\sin(x)$, $\tan(x)$ ja $\cot(x)$ ovat parittomia funktioita.

Funktiota f sanotaan *jaksolliseksi*, jos $\exists a \neq 0$ s.e. $\forall x \in M_f$ pätee $f(x+a) = f(x)$. Vakiota $a \neq 0$ sanotaan tällöin f :n jaksoksi. Pienintä positiivista jaksoa kutsutaan funktion *perusjaksoksi*; usein jaksona ilmoitetaan juuri funktion perusjakso.

Esimerkki 1.1.3. Funktiot $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ ovat 2π -jaksollisia, kun taas funktiot $\tan(x)$ ja $\cot(x)$ ovat π -jaksollisia.

1.2 Kompleksiluvut

Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ muodostuu luvuista $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja i on *imaginaariyksikkö*, jolle pätee $i^2 = -1$. Kompleksiluvut voidaan ajatella *reaalilukupareina* (x, y) ja havainnollistaa vektoreina *kompleksitasossa*, jolloin erityisesti $i = (0, 1)$. Luvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *reaaliosa* on x ja *imaginaariosa* on y .



Kuva 1.1: Piste $z = 6 + 4i$ kompleksitason vektorina.

Laskutoimitukset. Kompleksiluvuille voidaan määritellä *yhteen- ja kertolasku*. Kompleksilukujen $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ summa on

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

ja tulo on

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Yhteenlaskulla on seuraavat ominaisuudet:

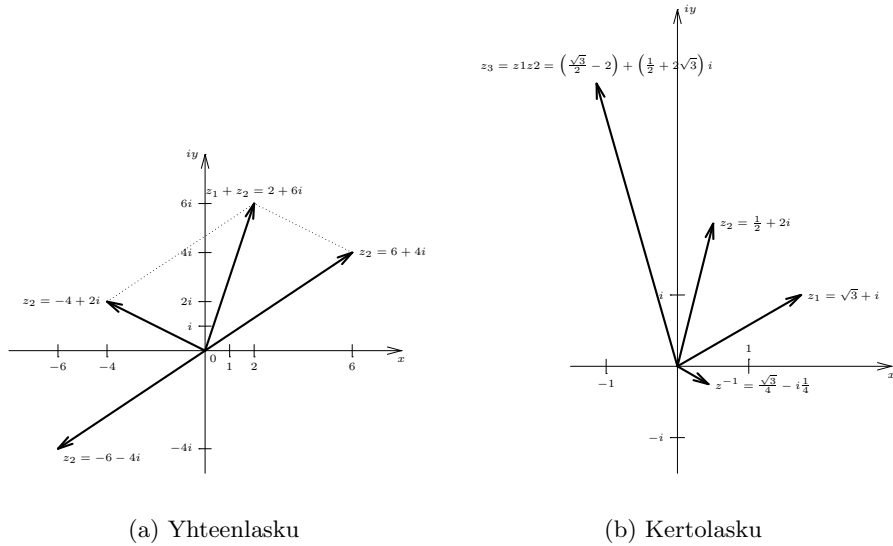
- (i) (liitännäisyys) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- (ii) (vaihdannaisuus) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- (iii) on olemassa nolla-alkio $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$, jolle pätee: $z + 0 = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- (iv) jokaisella $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on olemassa vasta-alkio $-z = -x + i(-y) = -x - iy$ ts. $z + (-z) = 0$.

Kertolaskulla on ominaisuudet:

- (i) (liitännäisyys) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
- (ii) (vaihdannaisuus) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- (iii) (osittelulaki) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$;
- (iv) on olemassa ykkösalkio $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$, jolle pätee: $1 \cdot z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- (v) jokaiselle $z \neq 0$ on olemassa käänteisluku $z^{-1} = \frac{1}{z}$, jolle pätee $z^{-1}z = 1$.

Itse asiassa, jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, niin

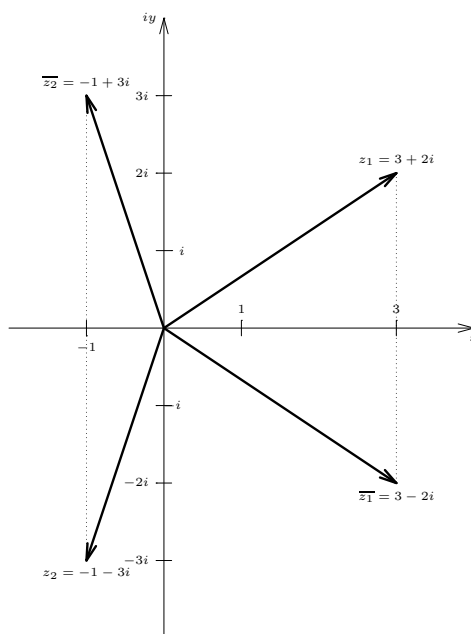
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$



Kuva 1.2: Yhteen- ja kertolasku.

Kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = x - iy$. Liittoluvulla on ominaisuudet

- (i) $\overline{(\bar{z})} = z$;
- (ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
- (iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;
- (iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.



Kuva 1.3: Liittoluku.

Liittoluvun avulla $z = x + iy$:n *reaali-* ja *imaginaariosa* saadaan seuraavasti

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{ja} \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Kompleksiluku voidaan esittää *napakoorinaattien avulla* muodossa

$$z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Pituutta $r = |z|$ sanotaan kompleksiluvun z *moduliksi* ja kulmaa $\phi = \arg z$ sen *argumentiksi*. Näille pätee

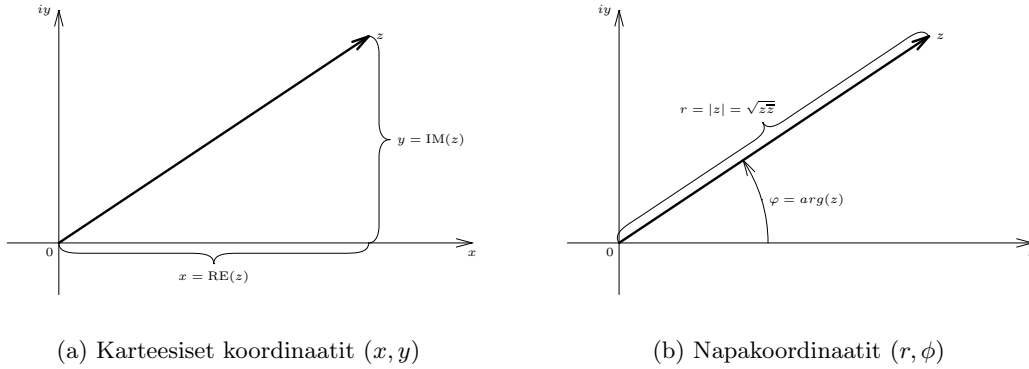
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}};$$

$$\phi = \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \operatorname{Re} x \geq 0; \\ \pm\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \operatorname{Re} x < 0. \end{cases}$$

Vaihtoehtoisesti

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Moduli on ei-negatiivinen reaaliluku ja argumentti puolestaan on 2π :n monikerran tarkkuudella määriteltä reaaliluku, kun $z \neq 0$. Usein argumentti rajataan välille $0 \leq \arg z < 2\pi$ tai välille $-\pi < \arg z \leq \pi$.



Kuva 1.4: Karteesinen- ja napakoordinaattiesitys.

Esimerkki 1.2.1. Liittoluku napakoordinaateissa:

$$\bar{z} = x - iy = r \cos \phi - ir \sin \phi = r (\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)).$$

Erityisesti $|\bar{z}| = r = |z|$ ja $\arg(\bar{z}) = -\phi = -\arg(z)$.

Kompleksilukujen summaa $z_1 + z_2$ vastaa kompleksitasossa vektoriyhteenlaskua, vrt. Kuva 1.2(a). Kompleksilukujen tuloa $z_1 z_2$ voi puolestaan havainnollistaa kompleksitasossa napakoordinaattiesityksen avulla. Asian selvittämiseksi tarkastellaan tulon $z_1 z_2$ napakoordinaattiesitystä.

Tulo ja osamäärä napakoordinaateissa: Esitetään kompleksiluvut z_1 ja z_2 napakoordinaateissa:

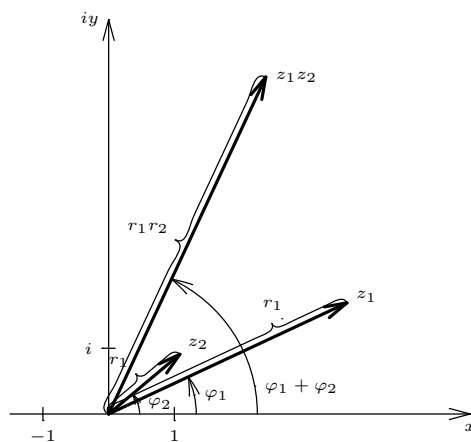
$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \\ z_2 &= r_2 (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2). \end{aligned}$$

Tällöin tulolle $z_1 z_2$ saadaan napakoordinaattiesitys

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot r_2 (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) - \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + i (\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) + \sin(\phi_1) \cos(\phi_2))) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtälö seuraa sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista (kts. Luku 1.1). Niinpä

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) &= \phi_1 + \phi_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

Kuva 1.5: Tulo $z_1 z_2$ napakoordinaateissa.

Osamäärän napakoordinaattiesitys: Kun $z_2 \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{r_1 (\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1)) \cdot r_2 (\cos(-\phi_2) + i \sin(-\phi_2))}{r_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)), \end{aligned}$$

joten

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{ja} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Esimerkki 1.2.2. Lasketaan luvun $z_0 = \frac{i}{1+i\sqrt{3}}$ reaali- ja imaginaariosa sekä moduli ja argumentti.

$$\frac{i}{i + i\sqrt{3}} = \frac{i(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{i + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.$$

Siten $\operatorname{Re} z_0 = \sqrt{3}/4$ ja $\operatorname{Im} z_0 = 1/4$. Toisaalta z_0 :n moduli on

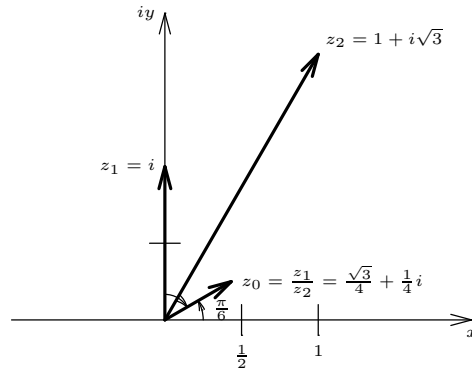
$$|z_0| = \left| \frac{i}{1 + i\sqrt{3}} \right| = \frac{|i|}{|1 + i\sqrt{3}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$$

ja argumentti on

$$\arg z_0 = \arg\left(\frac{i}{1 + i\sqrt{3}}\right) = \arg(i) - \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Siis

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



Kuva 1.6: Osamäärä $z_0 = \frac{z_1}{z_2}$ napakoordinaateissa.

Modulilla on tärkeä geometrinen ominaisuus. *Moduli määrää normin (vrt. Mat.Menet. II) kompleksilukujen joukossa*, ts. sillä on seuraavat kolme ominaisuutta:

- (i) $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ ja $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- (ii) $|az| = |a| \cdot |z|, \forall a \in \mathbb{R}$ ja $\forall z \in \mathbb{C}$;
- (iii) (Kolmioepäyhtälö) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 1.2.3. Olkoot $z_1 = -2 + 2i$ ja $z_2 = 3i$. Tällöin

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (-2 + 2i)(3i) = -6 - 6i, \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-2 + 2i}{3i} = \frac{(-2 + 2i)(-3i)}{3i \cdot (-3i)} = \frac{2 + 2i}{3} = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3}, \\
 |z_1 z_2| &= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{8} \cdot 3 = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \sqrt{(-3)^2} = |z_1| \cdot |z_2|, \\
 \arg(z_1) &= \frac{3\pi}{4}, \quad \arg(z_2) = \frac{\pi}{2}, \\
 \arg(z_1 z_2) &= -\frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi, \\
 \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{\pi}{4} = \arg(z_1) - \arg(z_2).
 \end{aligned}$$

Tulon modulin ja argumentin kaavat yleistyvät n :n luvun tulolle. Jos $z = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$, niin

$$|z| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \quad \text{ja} \quad \arg(z) = \sum_{i=1}^n \arg(z_i).$$

Jos tässä valitaan $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, saadaan ns. *de Moivre'n kaava*:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)).$$

Jos erityisesti $|z| = 1$, niin

$$z^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi).$$

Napakoordinaattiesitys on hyödyllinen myös ratkaistaessa polynomiyhtälöitä. Tarkastellaan erikoistapausta $z^n = w$, jolloin $z = \sqrt[n]{w}$; ts. on etsittävä luvun $w \in \mathbb{C}$ kaikki n -juuret kompleksitasossa. Olkoot

$$w = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \quad \text{ja} \quad z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

$r, \rho \geq 0$. Tällöin

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = w,$$

joten

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{ja} \quad n\theta = \phi + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

eli

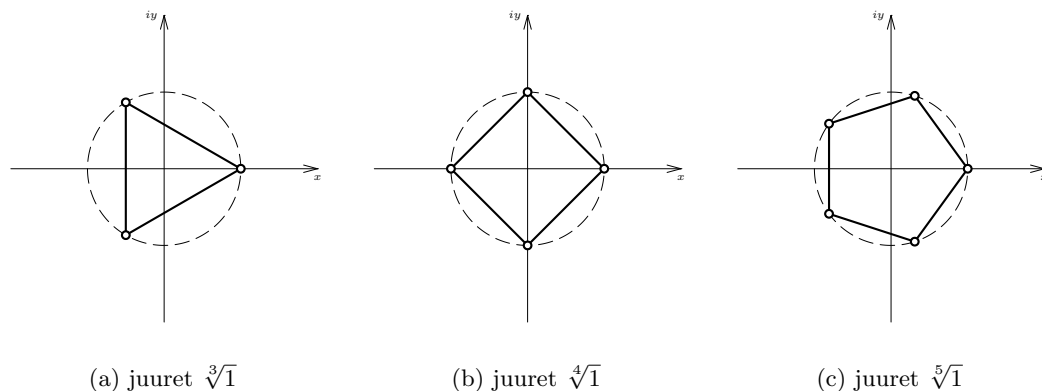
$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{ja} \quad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Erisuuret juuret saadaan arvoilla $k = 0, 1, \dots, n-1$ ja ratkaisuksi saadaan n kappaletta luvun w n -juuria:

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Kun $|w| = 1$, nähdään, että juuret $\sqrt[n]{w}$ sijaitsevat kompleksitason yksikköympyrän kehällä ja määräävät tasasivuisen n -monikulmion, jonka kärjet ovat pisteissä

$$\sqrt[n]{1} = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$



Kuva 1.7: Luvun $z = 1$ n erisuurta n -juurta $\sqrt[n]{1}$ arvoilla $n = 3, 4, 5$.

Kompleksilukujen eräänä tärkeänä ominaisuutena on, että jokaisella (reaali- tai kompleksikertoimisella) n :n asteen ($n > 0$) polynomilla on täsmälleen n kappaletta juuria kompleksilukujen joukossa monikerrat huomioiden. [Algebran peruslause.]

1.3 Eräitä kompleksifunktioita

EkspONENTTIFUNKTIO kompleksitasossa määritellään kaavalla

$$(1.1) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Kuva 1.8(b) havainnollistaa funktion $z \rightarrow e^z$ määritelmää kompleksitason kuvauksena.

Kun $z = \operatorname{Re} z = x$, saadaan tavallinen reaaliakselilla määritelty eksponenttifunktio. Kun $z = iy$, saadaan

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (\text{Eulerin kaava})$$

Kun z esitetään napakoordinaateissa $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, saadaan jokaiselle kompleksiluvulle $z \neq 0$ seuraava esitys eksponenttifunktion avulla

$$(1.2) \quad z = |z|e^{i\phi} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\phi} = e^{\ln|z|+i\phi}, \quad |z| > 0.$$

Esimerkkejä: $e^{2\pi i} = e^0 = 1$, $e^{\pm\pi i} = -1$, $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ja $e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$.

Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista seuraa

$$\begin{aligned} e^{iy_1} e^{iy_2} &= (\cos(y_1) + i \sin(y_1)) (\cos(y_2) + i \sin(y_2)) \\ &= (\cos(y_1) \cos(y_2) - \sin(y_1) \sin(y_2)) + i (\sin(y_1) \cos(y_2) + \cos(y_1) \sin(y_2)) \\ &= \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) = e^{i(y_1+y_2)}. \end{aligned}$$

Tämän nojalla e^z toteuttaa myös kompleksitasossa kaavan

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Sini- ja kosinifunktion jaksollisuudesta seuraa, että e^z on $2\pi i$ -jaksollinen funktio,

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Siten e^z saavuttaa kaikki arvonsa jo *jaksovyössä* $-\pi < y \leq \pi$, $x \in \mathbb{R}$; kts. Kuva 1.8(c).

Huom. Selvästi $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$, sillä $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Toisaalta kaavan (1.2) nojalla kaikki arvot $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kuuluvat e^z :n arvojoukkoon.

Huom. EkspONENTTIFUNKTION määritelmästä (1.1) nähdään, että $e^z = e^x e^{iy}$ kompleksitason pisteessä $z = x + iy$ määräytyy olennaisesti sen arvoista imaginaariakselilla $z = iy$ eli Eulerin kaavasta. Palautetaan mieleen reaaliakselilla määriteltyjen funktioiden e^x , $\sin x$ ja $\cos x$ Taylor-sarjakehitelmät:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Korvaamalla e^x :n Taylor-sarjakehitelmässä luku x imaginaariluvulla iy ja huomioimalla, että

$$(iy)^n = \begin{cases} y^n, & n = 4k \\ iy^n, & n = 4k+1 \\ -y^n, & n = 4k+2 \\ -iy^n, & n = 4k+3 \end{cases}$$

todetaan, että

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \cos y + i \sin y,$$

mikä osaltaan selittää e^z :n määritelmän (1.1) ja Eulerin kaavan sisällön.

Trigonometriset funktiot kompleksitasossa. Eulerin kaavoista

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{ja} \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y, \quad y \in \mathbb{R}$$

saadaan

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Sini- ja kosinifunktiot määritellään koko *kompleksitasossa* eksponenttifunktion avulla vastaavasti:

$$(1.3) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Samalla Eulerin kaava yleistyy koko kompleksitasoon

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tangentti- ja kotangenttifunktiot voidaan nyt määritellä kaavoilla

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{ja} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

kun $\cos z \neq 0$ ja vastaavasti $\sin z \neq 0$.

Logaritmifunktio kompleksitasossa: Kun eksponenttifunktio rajoitetaan jaksovyöhön $-\pi < y \leq \pi$, $x \in \mathbb{R}$, niin se on injektiivinen ja arvojoukkona on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Luonnollisen logaritmin* $\ln z$ ns. *päähaara* kompleksitasossa ($z \neq 0$) määritellään e^z :n yo. rajoittuman käänteisfunktiona. Olkoon $\ln z = w = u + iv$ ja $z = re^{i\phi}$. Tällöin

$$z = e^w = e^u e^{iv},$$

joten $e^u = r = |z|$ ja $v = \phi = \arg z$. Siten

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z), \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

eli $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln |z|$ ja $\operatorname{Im}(\ln z) = \arg z$. Muut $\ln z$:n haarat saadaan sen päähaarasta $2\pi i$ -monikertoina:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Määritelmästä ja eksponenttifunktion ominaisuuksista seuraa

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad \text{ja} \quad \ln \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \ln z_1 - \ln z_2.$$

Huom. Funktio $\ln z$ on epäjatkua negatiivisella reaaliakselilla $(-\infty, 0]$.

Yleinen potenssi- ja eksponenttifunktio kompleksitasossa: Yleinen potenssi-funktio z^c , missä myös potenssi c voi olla kompleksiluku voidaan määritellä logaritmfunktion avulla:

$$\begin{aligned} z^c &= e^{c \ln z} \quad (\text{päähaara}), \\ z^c &= e^{c \operatorname{Ln} z} \quad (\text{muut haarat}). \end{aligned}$$

Esimerkki:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(\ln|i| + i \arg i)} = e^{i(\ln|1| + i \frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}.$$

Vaihtamalla määritelmässä z :n ja c :n roolit saadaan määriteltyä myös eksponenttifunktio kantalukuna $a \in \mathbb{C}$:

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Huom. $\sin z$ ja $\cos z$ ovat myös kompleksitasossa 2π -jaksollisia, koska e^z on $2\pi i$ -jaksollinen:

$$\begin{aligned} \sin(z + 2\pi k) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(z+2\pi k)} - e^{-i(z+2\pi k)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z, \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vastaavasti $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Sen sijaan ne eivät ole rajoitettuja kuvauksia $\mathbb{C}$:ssä. Valitsemalla $z = iy$ todetaan, että

$$\cos iy = \frac{1}{2} (e^{i^2 y} + e^{-i^2 y}) = \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}),$$

joten imaginaariakselilla kosinifunktio kasvaa rajatta:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \cos iy = +\infty.$$

Esimerkki 1.3.1. Etsitään yhtälön $\cos z = 5$ kaikki ratkaisut. Määritelmän nojalla yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) &= 5 \\ \iff (e^{iz})^2 + e^{-iz} e^{iz} &= 10e^{iz} \\ \iff (e^{iz})^2 - 10e^{iz} + 1 &= 0 \\ \iff e^{iz} &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}. \end{aligned}$$

Toisaalta $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$, joten

$$\begin{cases} y = -\ln(5 \pm \sqrt{24}) \\ x = \arg(e^{iz}) = \arg(5 \pm \sqrt{24}) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Niinpä yhtälöllä on äärettömän monta eri ratkaisua kompleksitasossa:

$$z = 2\pi k - i \ln(5 \pm \sqrt{24}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hyperboliset funktiot. Hyperboliset funktiot $\sinh x$ ja $\cosh x$ määritellään reaali-alueessa seuraavilla kaavoilla

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

ja edelleen hyperboliset funktiot $\tanh x$ ja $\coth x$ reaali-alueessa vastaavasti kaavoilla

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Suoralla laskulla todetaan, että $\sinh(-x) = -\sinh x$ ja $\cosh(-x) = \cosh x$. Niinpä $\sinh x$ on pariton ja $\cosh x$ parillinen funktio, ja siten funktiot $\tanh x$ ja $\coth x$ ovat parittomia. [Hahmottele niiden kuvaajat.]

Seuraava kaava antaa erään yhteyden funktioiden $\sinh x$ ja $\cosh x$ välillä:

$$(1.4) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Hyperbolisten funktioiden määritelmät yleistyvät sellaisenaan myös kompleksimuuttujalle $z \in \mathbb{C}$:

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

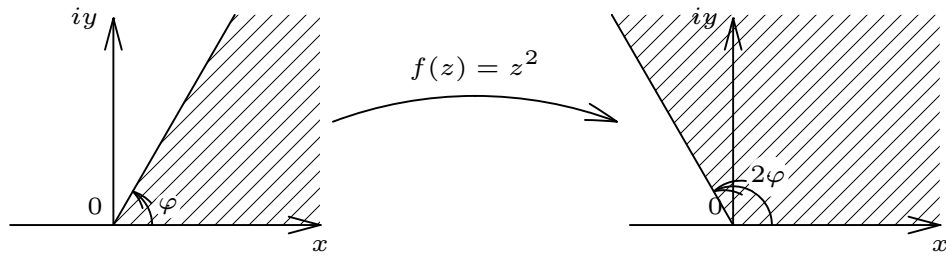
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Huomioimalla kompleksisten trigonometrinen funktioiden $\sin z$ ja $\cos z$ määritelmät kaavoissa (1.3) todetaan, että kompleksialueessa hyperbolisilla funktioilla on yhteys trigonometrisiin funktioihin:

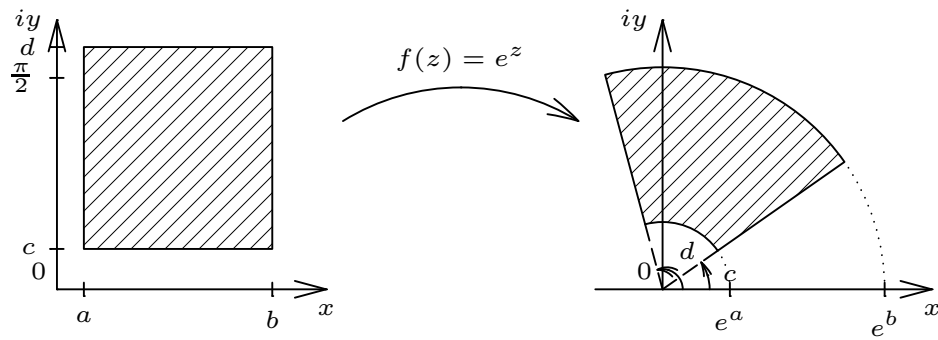
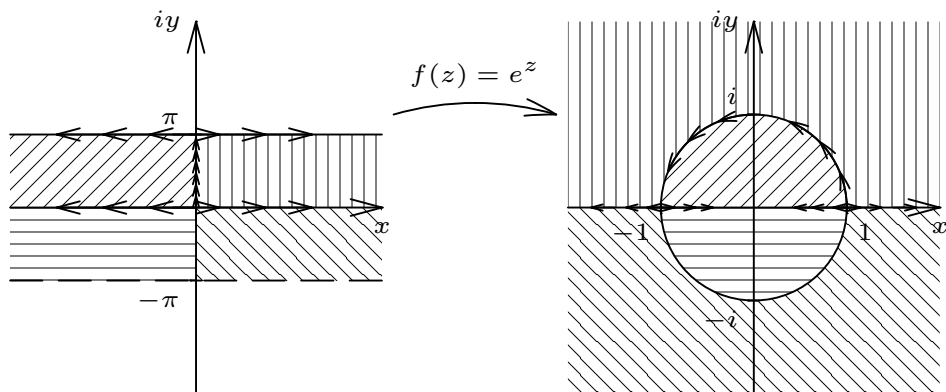
$$\cosh iz = \cos z, \quad \sinh iz = i \sin z$$

tai yhtäpitävästi

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z.$$



(a) neliöön korotus

(b) suorakaiteen kuva kuvauksessa $z \rightarrow e^z$ (c) jaksoyön osien kuvautuminen kuvauksessa $z \rightarrow e^z$

Kuva 1.8: Alueiden kuvautuminen neliöinnin ja eksponenttifunktion tapauksissa.

1.4 Jatkuvuus ja derivoituvuus

Koska kompleksiluvun moduli $|z|$ määrää normin, joka yhtyy kompleksitasoon piirretyn vektorin $z = x + iy$ pituuteen, yhtyy kompleksitason topologia $\mathbb{R}^2$:n topologiaan. Siten, esim. pisteen $z_0 \in \mathbb{C}$ ε -säteinen (avoin) palloympäristö on joukko

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Kompleksitasossa *funktion raja-arvon* ja *jatkuvuuden* määritelmät ja niiden sisältö on sama kuin kahden muuttujan vektorifunktioilla $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Niinpä funktio $f : M_f \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva pisteessä $z_0 \in M_f \subset \mathbb{C}$, jos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, $z \in M_f$, ts.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |z - z_0| < \delta_\varepsilon (z \in M_f) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Derivaatta: Toisin kuin tavallisessa xy -tasossa $\mathbb{R}^2$ kompleksiluvuille on määriteltä kertolasku ja siten myös osamäärä. Tämä mahdollistaa *derivaatan määritelmän kompleksifunktioille* yhden muuttujan reaali-funktioiden tapaan, suoraan erotusosamäärän raja-arvona. Jos raja-arvo

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa sanotaan, että f on derivoituva (differentioituva) pisteessä z_0 ja että raja-arvo $f'(z_0)$ on f :n *derivaatta pisteessä* $z_0 \in \mathbb{C}$. Huomaa, että määritelmässä $z \rightarrow z_0$ kompleksitasossa. Ko. raja-arvo ei saa siten riippua suunnasta tai tavasta, jolla $z \rightarrow z_0$.

Esimerkki 1.4.1. Olkoon $f(z) = z^2$. Tällöin

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0.$$

Siis $f'(z_0) = 2z_0$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Derivaatalla on seuraavat tavanomaiset ominaisuudet:

- (i) $(cf)'(z) = cf'(z)$, $c \in \mathbb{C}$;
- (ii) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
- (iii) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
- (iv) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$.

Kompleksifunktion derivoituvuus muistuttaa vektorifunktioiden *differentioituvuutta* (vrt. funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ approksimointi tangenttitasolla), joka on luonteeltaan voimakkaampi vaatimus kuin osittaisderivaattojen olemassaolo. Useat yksinkertaisetkaan kompleksimuuttujan funktiot eivät välttämättä ole derivoituvia.

Esimerkki 1.4.2. (Kompleksikonjugaatti) Olkoon $f(z) = \bar{z} = x - iy$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$. Funktio f ei ole derivoituva millään $z_0 \in \mathbb{C}$. Tarkastellaan funktion f erotusosamäärää pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

Jos $y = y_0$, niin

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

ja jos $x = x_0$, niin

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} -\frac{y - y_0}{y - y_0} = -1.$$

Niinpä f :n erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$, ts. $f'(z_0)$ ei ole olemassa.

Kompleksifunktiota $f(z)$ sanotaan *analyttiseksi alueessa* $A \subset \mathbb{C}$ (tässä ”alue” = avoin yhtenäinen joukko $\mathbb{C}$:ssä), jos se on derivoituva $\forall z \in A$. Funktiota $f(z)$ sanotaan *analyttiseksi pisteessä* $z_0 \in \mathbb{C}$, jos se on analyttinen jossakin pisteen z_0 ε -ympäristössä.

Esim. Polynomit $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, $c_i \in \mathbb{C}$, ovat analyttisiä koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Samoin rationaalifunktiot $P(z)/Q(z)$, missä $P(z)$ ja $Q(z)$ ovat polynomeja, ovat analyttisiä nimittäjän nollakohtia ($q(z) = 0$) lukuunottamatta.

Cauchy-Riemannin yhtälöt. Olkoon f kompleksifunktio ja merkitään $z = x + iy$,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

missä $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$. Jos f on derivoituva, niin se on myös jatkuva (vektorifunktiona) ja tällöin myös reaaliarvoiset komponenttikuvaukset $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ ovat jatkuvia kahden muuttujan x ja y funktioina. Voimme myös tutkia u :n ja v :n osittaisderivaattojen

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u, \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y} u, \quad v_x = \frac{\partial}{\partial x} v \quad \text{ja} \quad v_y = \frac{\partial}{\partial y} v$$

olemassaoloa. Osoittautuu, että f :n analyttisyys voidaan karakterisoida u :n ja v :n osittaisderivaattoihin liittyvien Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla.

Olkoon $f = u + iv$ määritelty pisteen z_0 ympäristössä ja oletetaan, että f on derivoituva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0$. Tarkastellaan erotusosamäärän raja-arvoa, kun $z \rightarrow z_0$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{z - z_0} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{z - z_0}.$$

Kun valitaan $y = y_0$, nähdään (pitämällä f :ää vektorifunktiona), että seuraavat raja-arvot ovat olemassa ja että

$$(1.5) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, y=y_0} \left(\frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0).$$

Vastaavasti, kun $x = x_0$ päädytään raja-arvoyhtälöön

$$(1.6) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, x=x_0} \left(\frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right) = -i u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

Kohdista (1.5) ja (1.6) nähdään, että

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Siis f toteuttaa z_0 :ssa ns. Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Funktion derivoituvuus kompleksimuuttujan suhteen on yhtäpitävää differentioituvuuden kanssa, mikä nähdään seuraavasta *differentiaalikehitelmästä*:

$$(1.7) \quad f(z_0 + \lambda) - f(z_0) = c\lambda + \lambda\varepsilon(\lambda),$$

missä $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$, kun $\lambda \rightarrow 0$. Tällöin $c = f'(z_0) (\in \mathbb{C})$. Perustelu on sama kuin yhden muuttujan reaalifunktioiden tapauksessa (vrt. Mat. menet. I). Nyt seuraukset ovat kuitenkin voimakkaampia, nimittäin funktiot $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ ovat myös *differentioituvia kahden muuttujan funktiona* (vrt. Mat. menet. II). Huomioimalla lisäksi Cauchy-Riemannin yhtälöt saadaan funktion derivoituvuudelle kompleksimuuttujan suhteen seuraava karakterisaatio.

Lause 1.4.3. Funktio $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on derivoituva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, jos ja vain jos komponenttikuvaukset $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ ovat differentioituvia pisteessä (x_0, y_0) ja ne toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että f on derivoituva pisteessä z_0 . Merkitään $\lambda = h + ik$ ja $f'(z_0) = a + ib (\in \mathbb{C})$. Differentiaalikehitelmästä (1.7) nähdään, että kun $\lambda \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) &= \operatorname{Re} (f'(z_0)\lambda + \lambda\varepsilon(\lambda)) \\ &= ah - bk + \operatorname{Re} (\lambda\varepsilon(\lambda)) \\ &= ah - bk + |\lambda|\varepsilon_1(\lambda), \end{aligned}$$

missä

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(\lambda \varepsilon(\lambda))}{|\lambda|} = 0.$$

Vastaavasti, kun $\lambda \neq 0$,

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = \operatorname{Im}(f'(z_0)\lambda + \lambda \varepsilon(\lambda)) = bh + ak + |\lambda| \varepsilon_2(\lambda),$$

missä

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon_2(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(\lambda \varepsilon(\lambda))}{|\lambda|} = 0.$$

Siten u ja v ovat differentioituvia pisteessä (x_0, y_0) ja

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = a, & u_y(x_0, y_0) = -b; \\ v_x(x_0, y_0) = b, & v_y(x_0, y_0) = a. \end{cases}$$

Oletetaan kääntäen, että u ja v ovat differentioituvia (x_0, y_0) :ssä ja toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt. Tällöin

$$\begin{cases} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)h + u_y(x_0, y_0)k + |\lambda| \varepsilon_1(\lambda); \\ v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)h + v_y(x_0, y_0)k + |\lambda| \varepsilon_2(\lambda), \end{cases}$$

missä $\varepsilon_1(\lambda) \rightarrow 0$ and $\varepsilon_2(\lambda) \rightarrow 0$ kun $\lambda \rightarrow 0$. Siten

$$f(z_0 + \lambda) - f(z_0) = (u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))h + (u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0))k + |\lambda|(\varepsilon_1(\lambda) + i\varepsilon_2(\lambda)).$$

Tässä $|\lambda|(\varepsilon_1(\lambda) + i\varepsilon_2(\lambda)) = \lambda \varepsilon(\lambda)$, missä $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$, kun $\lambda \rightarrow 0$. Huomioimalla Cauchy-Riemannin yhtälöt nähdään, että

$$\begin{aligned} f(z_0 + \lambda) - f(z_0) &= u_x(x_0, y_0)(h + ik) + iv_x(x_0, y_0)(h + ik) + \lambda \varepsilon(\lambda) \\ &= (u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))\lambda + \lambda \varepsilon(\lambda). \end{aligned}$$

Siis f on derivoituva pisteessä z_0 ja

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

□

Seuraava tulos antaa riittävän ehdon funktion f derivoituvuudelle pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.

Lause 1.4.4. Jos reaaliarvoisilla funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat 1. kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä (x_0, y_0) ja ne toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt pisteessä (x_0, y_0) , niin funktio

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

on derivoituva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0$. Lisäksi

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Todistus. Osittaisderivaattojen jatkuvuus takaa funktioiden u ja v differentioituvuuden (x_0, y_0) :ssä (vrt. Mat. menet. II-kurssi). Tämän perusteella väite saadaan Lauseesta 1.4.3. $\square$

Esimerkki 1.4.5. $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Nyt $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ ja edelleen $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = -1$. Siten $u_x \neq v_y$.

Lause 1.4.6. Jos $f = u + iv$ on analyyttinen alueessa $A \subset \mathbb{C}$, niin $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$ toteuttavat Laplace-yhtälön:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ \nabla^2 v &= v_{xx} + v_{yy} = 0.\end{aligned}$$

Todistus. (IDEA) Funktion f analyyttisyydestä seuraa, että myös sen derivaatta f' on analyyttinen $\Rightarrow f^{(n)}$ on analyyttinen (tämä perustellaan myöhemmin). Derivoimalla Cauchy-Riemannin yhtälöt saadaan

$$(1.8) \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx}, & u_{xy} = v_{yy}; \\ u_{yx} = -v_{xx}, & u_{yy} = -v_{xy}. \end{cases}$$

Koska $f^{(n)}$ on analyyttinen, komponenttikuvauksilla u ja v on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat. Tämän nojalla $u_{xy} = u_{yx}$ ja $v_{xy} = v_{yx}$ (vrt. Mat. menet. II-kurssi). Niinpä yhtälöistä (1.8) nähdään, että $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ja $v_{xx} + v_{yy} = 0$. $\square$

Esimerkki 1.4.7. (i) $f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z$;

(ii) $f(z) = \sin z$, $f'(z) = \cos z$;

(iii) $f(z) = \cos z$, $f'(z) = -\sin z$;

(iv) $f(z) = \tan z$, $f'(z) = 1/\cos^2 z$;

(v) $f(z) = \cot z$, $f'(z) = -1/\sin^2 z$;

(vi) $f(z) = \ln z$, $f'(z) = \frac{1}{z}$, kun $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Esimerkki 1.4.8. Myös hyperbolisten funktioiden derivaatat on helppo johtaa normaalien derivointisääntöjen avulla huomioimalla kaava (1.4) sekä peruskaava $D(e^z) = e^z$:

(i) $f(z) = \sinh z$, $f'(z) = \cosh z$;

(ii) $f(z) = \cosh z$, $f'(z) = \sinh z$;

(iii) $f(z) = \tanh z$, $f'(z) = 1/\cosh^2 z$;

(iv) $f(z) = \coth z$, $f'(z) = -1/\sinh^2 z$.

Luku 2: KOMPLEKSIINEN INTEGROINTI

2.1 Käyräintegraali kompleksitasossa

Kompleksifunktioille voidaan määritellä *käyräintegraali* samaan tapaan kuin usean muuttujan reaalifunktioille. Olkoon C paloittain sileä käyrä kompleksitasossa, t.s. sillä on parametriesitys $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t)$, joka on paloittain jatkuvasti derivoituva parametrin t suhteen. Ositetaan väli $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jakopisteillä $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$, jolloin pisteet $z_k = z(t_k)$ jakavat C :n osakäyriin. Valitaan kultakin C :n osakäyrältä z_{k-1} :n ja z_k :n välistä pistettä $\xi_k (= z(\eta_k), t_{k-1} \leq \eta_k \leq t_k)$. Jos summalla

$$S_d := \sum_{i=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

on raja-arvo, kun $|D| := \max_k |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$, joka ei muutoin riipu jaosta D eikä pisteiden ξ_k valinnasta, sanotaan ko. raja-arvoa f :n käyräintegraaliksi pitkin (suunnistettua) käyrää C . Raja-arvon olemassaolo ilmaistaan usein sanomalla, että funktio f on integroituva yli käyrän C ja ko. raja-arvolle käytetään merkintää

$$\int_C f(z) dz.$$

Kirjoittamalla $f = u + iv$ ja $z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$ saadaan $\int_C f(z) dz$ palautettua reaalifunktioiden käyräintegraaleiksi

$$\begin{aligned} S_d &= \sum_{k=1}^n u_k \Delta x_k - \sum_{i=1}^n v_k \Delta y_k + i \left(\sum_{i=1}^n u_k \Delta y_k + \sum_{i=1}^n v_k \Delta x_k \right) \\ \Rightarrow \int_C f(z) dz &= \int_C u(x, y) dx - \int_C v(x, y) dy + i \left(\int_C u(x, y) dy + \int_C v(x, y) dx \right). \end{aligned}$$

Kirjoittamalla

$$\begin{cases} f(z) = u(x, y) + iv(x, y); \\ dz = dx + idy \end{cases}$$

voidaan tämä yhteys nähdä myös laskemalla symbolisesti:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u(x, y) + iv(x, y)) (dx + idy) \\ &= \int_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy + iu(x, y) dy + iv(x, y) dx) \\ &= \int_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_C (u(x, y) dy + v(x, y) dx). \end{aligned}$$

Jos f on jatkuva, niin f on integroituva yli käyrän C ja käyräintegraali voidaan laskea määrättynä integraalina käyttämällä apuna C :n parametriesitystä $t \mapsto z(t)$ (vrt. Mat. menet. I ja II-kurssit):

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Integraalifunktio ja yhteys käyräintegraaliin. Kuten reaalfunktioiden tapauksessa funktiota F , jolla on ominaisuus $F'(z) = f(z)$ sanotaan *funktion f integraalifunktioksi*. Integraalifunktio on kompleksista vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty. Todettakoon, että integraalifunktion olemassaolo muistuttaa vektorifunktion potentiaalin olemassa ja sen ominaisuudetkin ovat samankaltaiset (vrt. Usean muuttujan analyysin kurssi).

Lause 2.1.1. Jos f :llä on integraalifunktio F , niin

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0),$$

missä z_0 on käyrän C alkupiste ja z_1 C :n päätepiste.

Todistus.

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b (F \circ z)'(t) dt = [F \circ z]_a^b \\ &= (F \circ z)(b) - (F \circ z)(a) = F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

□

Tämä osoittaa, että jos f :llä on integraalifunktio, niin sen käyräintegraalit *eivät riipu* pisteistä z_0 ja z_1 yhdistävän polun valinnasta. Myös käänteinen väite pätee:

Lause 2.1.2. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva alueessa $A \subset \mathbb{C}$. Tällöin funktiolla f on integraalifunktio alueessa A , jos ja vain jos kaikille umpinaisille paloittain säännöllisille käyrille $C \subset A$ on voimassa

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Tämän lauseen käänteinen väite voidaan todistaa samalla tavalla kuin Mat. menet. II-kurssilla vastaava tulos.

Esimerkki 2.1.3. Lasketaan $\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz$ pitkin ympyrän, jonka keskipisteenä on z_0 ja säteenä 1, kehää suunnistettuna vastapäivään.

Valitaan C :lle parametriesitys $z(t) = z_0 + \cos t + i \sin t = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Tällöin $z'(t) = ie^{it}$ ja

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Huomaa, että $(\ln(z-z_0))' = \frac{1}{z-z_0}$, kun $z-z_0 \notin (-\infty, 0]$, mutta $\ln(z-z_0)$ on epäjatkuva arvoilla $z-z_0 \in (-\infty, 0]$. Erityisesti funktiolla $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z_0 = 0$) ei ole integraalifunktiota alueessa, joka sisältää origon.

2.2 Cauchy'n integraalilause ja integraalikaava

Integraalifunktion olemassaoloa on helpointa tarkastella alueessa A , joka on *yhdesti yhtenäinen*: jokaisen A :n umpinaisen käyrän C rajoittaman $\mathbb{C}$:n osajoukon pisteet kuuluvat joukkoon A . Tämä tarkoittaa, että A :ssa ei voi olla ”reikiä”. (Piirrä kuva.) Käyrää C sanotaan säännölliseksi (ja sileäksi), jos se ei leikkaa itseään eikä siinä ole kulmia (ts. käyrällä on tangentti kaikissa pisteissä). Tällaisen käyrän parametriesitys $z(t) : [a, b] \rightarrow C$ on säännöllinen, jos $z(t)$ on injektiivinen ja sen derivaatta $z'(t)$ on olemassa ja jatkuva, sekä lisäksi $z'(z) \neq 0$. Käyrä C on paloittain säännöllinen, jos se voidaan jakaa äärellisen moneksi osakäyräksi, jotka ovat säännöllisiä. (Piirrä kuva.)

Lause 2.2.1. (Cauchy'n integraalilause) Jos f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa A , niin jokaiselle A :n umpinaiselle paloittain säännölliselle käyrälle C pätee

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Todistus. Näytämme vain kuinka väitetty tulos voidaan johtaa, kun $f'(z)$ on jatkuva. Määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \oint (u(x, y) dy + v(x, y) dx) \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

missä jälkimmäinen yhtälö seuraa ns. *Greenin lauseesta*, joka todistetaan Matemaattiset menetelmät II-kurssilla (tässä R on käyrän C sisäpuolelle rajattu tasalue). Huomioimalla nyt Cauchy-Riemannin yhtälöt todetaan, että molemmissa tasointegraaleissa integroitava funktio on nollafunktio, jolloin ko. tasointegraalien arvot ovat myös nollia. $\square$

Seuraus 2.2.2. Jos f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa A , niin f :llä on A :ssa integraalifunktio.

Cauchy'n integraalilauseen tulos pätee myös yleisemmille kompleksitason alueille seuraavassa muodossa. Jos f on analyyttinen alueessa, joka sisältää alueen A ja sen (paloittain säännölliset äärellisen pituiset) reunakäyrät, niin

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 0,$$

kun alueen reuna ∂A (aluetta rajoittavat reunakäyrät) on *positiivisesti suunnistettu*: kuljettaessa reunakäyrää pitkin positiiviseen suuntaan alue A jää vasemmalle.

Esimerkki 2.2.3. (Vrt. Esimerkki 2.1.3.)

Suoraan havaitaan, että jos $C_r = \partial B_r(z_0)$ on r -säteisen ympyrän kehä keskipisteenä

z_0 ja valitaan parametriesitykseksi $z(t) = r(\cos t + i \sin t) + z_0 = z_0 + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), jolloin $z'(t) = rie^{it}$, niin saadaan

$$\oint_{C_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Integraalin arvo ei siis riipu säteestä r , vaikka eri r :n arvoja vastaa eri integrointipolku C_r . Soveltamalla ennen esimerkkiä mainittua tulosta, sama johtopäätös voidaan yleistää monimutkaisemmille integrointipoluille C :

Olkoon C säännöllinen umpinainen käyrä, joka kulkee kerran pisteen $z_0 \in \mathbb{C}$ ympäri suunnistettuna vastapäivään ja olkoon $\partial B_r(z_0)$ sellaisen r -säteisen ympyrän kehä keskipisteenä z_0 , myös suunnistettuna vastapäivään, joka sijaitsee käyrän C sisäpuolella. Tällöin C ja $\partial B_r(z_0)$ rajaavat kompleksitasossa alueen A , jonka reunakäyrinä ne ovat. (Piirrä kuva.)

Vaihtamalla käyrän $\partial B_r(z_0)$ suunnistus vastakkaiseksi (eli kulku myötäpäivään), tulevat molemmat A :n reunakäyrät positiivisesti suunnistetuiksi. Tämän nojalla

$$0 = \int_{\partial A} f(z) dz = \oint_C f(z) dz + \oint_{-\partial B_r(z_0)} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - \oint_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz,$$

kun f on analyyttinen joukon A sisältävässä alueessa. Erityisesti, kun $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, pätee

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Niinpä integraalin arvo ei edelleenkään riipu yo. integrointikäyrästä C .

Esimerkin tulos voidaan yleistää seuraavasti.

Lause 2.2.4. (Cauchy'n integraalikaava) Olkoot f analyyttinen alueessa A , z_0 mielivaltainen A :n piste sekä C säännöllinen umpinainen kerran z_0 :n ympäri kulkeva vastapäivään suunnistettu käyrä, jonka rajaama alue kuuluu A :han. Tällöin

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Todistus. Kirjoitetaan $f(z) = f(z_0) + (f(z) - f(z_0))$. Tällöin

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z - z_0}}_{=2\pi i} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Toisaalta C voidaan korvata z_0 -keskisellä r -säteisellä ympyrällä; valitaan $z(t) = re^{it} + z_0$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Funktio f on derivoituvana jatkuva pisteessä z_0 , joten

$$\forall \epsilon > 0 \exists r > 0 \quad \text{s.e.} \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \text{ kun } |z - z_0| \leq r.$$

Koska $z'(t) = ire^{it}$ ja $|z'(t)| = r$, saadaan nyt arvio

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &= \left| \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z(t)) - f(z_0)}{z(t) - z_0} z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{|f(z(t)) - f(z_0)|}{|z(t) - z_0|}}_{=r} \underbrace{|z'(t)|}_{=r} dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z(t)) - f(z_0)|}_{<\epsilon} dt < 2\pi\epsilon. \end{aligned}$$

Tässä $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen. Niinpä $\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$. □

Esimerkki 2.2.5.

$$\oint_C \frac{e^z}{z - 2} dz = 2\pi i e^z|_{z=2} = 2\pi i e^2 (\approx 46, 4i).$$

Cauchy'n integraalikaava antaa myös esityksen derivaatalla $f'(z_0)$.

Seuraus 2.2.6. (Derivaatan esitys) Lauseen 2.2.4 oletuksien pätee

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Todistus. Soveltamalla Cauchy'n integraalikaava pisteissä z_0 ja $z_0 + \lambda$ saadaan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

ja

$$f(z_0 + \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \lambda)} dz.$$

Vähentämällä nämä esitykset puolittain nähdään, että

$$(2.1) \quad \frac{f(z_0 + \lambda) - f(z_0)}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \lambda)(z - z_0)} dz.$$

Siten

$$f'(z_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \lambda)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Tässä raja-arvon $\lambda \rightarrow 0$ ja integraalin järjestys voidaan vaihtaa (perustelu sivuutetaan), mistä väite seuraa. □

Saatu esitys $f'(z_0)$:lle osoittaa, että $f'(z_0)$ on jatkuva. Itse asiassa vastaava päättely käyttämällä $f'(z_0)$:n esitystä osoittaa, että $f'(z)$ on derivoituva ja

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz.$$

Niinpä f :llä on kaikkien kertalukujen derivaatat ja

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Huom. $f^{(n)}(z_0)$:n esitys saadaan derivoimalla Cauchy'n integraalikaava n kertaa z_0 :n suhteen (tässä $\frac{\partial}{\partial z_0}$:n ja $\oint$:n järjestyksen saa vaihtaa).

Analyyttisen funktion kaikkien kertalukujen derivaatat ovat siis analyyttisiä. Tästä seuraa, että Cauchy'n integraalilause voidaan kääntää.

Seuraus 2.2.7. (Morera'n lause) Olkoon A ja C kuten Cauchy'n integraalilauseessa (Lause 2.2.1). Jos f on jatkuva ja kaikille C pätee

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

niin f on analyyttinen A :ssa.

Todistus. $\oint_C f(z) dz = 0, \forall C \Rightarrow f$:llä on integraalifunktio $F(z)$. $F(z)$ on tällöin analyyttinen $\Rightarrow f(z)$ on analyyttinen. $\square$

Luku 3: SARJAKEHITELMISTÄ KOMPLEKSIALUEESSA

Kompleksialueessa sarjakehitelmillä on keskeinen merkitys. Kompleksilukujen $z_1, z_2, \dots$ muodostama sarja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ suppenee, jos *osasummien jonolla*

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

on *äärellinen raja-arvo* $S (= \sum_{k=1}^{\infty} z_k) \in \mathbb{C}$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ on suppeneva, jos ja vain jos reaalityyppiset sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \quad (z_k = x_k + iy_k)$$

kumpikin ovat suppenevia. Tällöin

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ sanotaan *itseisesti suppenevaksi*, jos modulien $|z_k|$ muodostama reaalityyppinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ suppenee. Jos sarja suppenee itseisesti, suppenevat myös reaalityyppiset sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ (itseisesti) majoranttiperiaatteen nojalla ja siten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ suppenee myös tavallisessa mielessä.

3.1 Potenssisarjat kompleksialueessa

Potenssisarjat ovat muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

missä $a_n \in \mathbb{C}$ ovat sarjan kertoimia, $z_0 \in \mathbb{C}$ on sarjan kehityskeskus ja $z \in \mathbb{C}$ on muuttuja. Seuraava lause todistetaan kuten reaalityyppisille.

Lause 3.1.1. (Abelin lause) Jos potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ suppenee pisteessä $z_1 \neq z_0$, niin se suppenee itseisesti jokaisella arvolla z , jolle $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Jos ko. potenssisarja hajaantuu pisteessä z_2 , niin se hajaantuu jokaisella arvolla z , jolle $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Tämän nojalla potenssisarjaan voidaan liittää *suppenemissäde* R ($R \geq 0$ tai $R = \infty$), jolle pätee

$$\begin{aligned} |z - z_0| < R &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{suppenee,} \\ |z - z_0| > R &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{hajaantuu.} \end{aligned}$$

Kuten reaalialueessa potenssisarja määrittelee konvergenssiekossa funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(z - z_0)^n$, jolla on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat z :n suhteen ja ne voidaan laskea derivoimalla sarja termeittäin:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Näin saaduilla potenssisarjoilla on sama suppenemissäde R kuin alkuperäisellä sarjalla, eli ne suppenevat arvoilla $|z - z_0| < R$. Erityisesti $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$, joten alkuperäinen sarja voidaan suppenemisekossa kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Tätä sanotaan f :n Taylorin sarjaksi pisteessä z_0 .

Esimerkki 3.1.2. Muodostetaan Taylorin sarja funktiolle

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

kehityskeskukseksi origo.

Selvästi

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(1-z)^{-1} = (-1) \cdot (1-z)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Vastaavasti

$$f''(z) = \frac{d}{dz}(1-z)^{-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

ja yleisesti

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Siten $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n! (= n(n-1) \cdots 2 \cdot 1)$ ja $f(z)$:lle saadaan Taylor sarjaksi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ko. Taylor-sarja yhtyy geometriseen sarjaan $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, joka suppenee arvoilla $|z| < 1$.

Esimerkki 3.1.3. Funktio $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on jatkuva $\forall x \in \mathbb{R}$ ja jopa äärettömän monta kertaa derivoituva funktio $\Rightarrow$ voidaan muodostaa Taylor-sarja. *Mutta:* Ko. Taylor-sarja suppenee pisteessä $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$. *Syy:* funktiolla $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ($z \in \mathbb{C}$) on navat pisteissä $z = \pm i$.

Potenssisarjan summa $f(z)$ on derivoituvana funktiona analyyttinen kiekossa $|z - z_0| < R$. Osoittautuu, että myös käänteinen tulos on voimassa: pisteessä z_0 analyyttinen funktio voidaan kehittää potenssisarjaksi (Taylorin sarjaksi) pisteessä z_0 , joka suppenee kohti alkuperäistä funktiota.

Potenssisarjan suppenemissäteeseen liittyy sama tulos kuin reaalialueessa: Jos raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R \quad \text{tai} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$$

on olemassa, niin se on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ suppenemissäde.

Esimerkki 3.1.4. Geometrisen sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ suppenemissäde on $R = 1$ ja sen summa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ on analyyttinen kiekossa $|z| < 1$. Itse asiassa rationaalifunktiona $\frac{1}{1-z}$ on analyyttinen, kun $z \neq 1$.

3.2 Laurentin sarja

Esitämme analyyttiselle funktiolle sarjakehitelmän, jonka kehityskeskukseksi voidaan valita myös piste, jossa ko. funktion ei tarvitse olla edes määritelty. Kehitelmällä on paljon käyttöä muun muassa residy-laskennassa, jonka avulla esimerkiksi hankalien käyräintegraalien laskeminen saattaa helpottua olennaisesti. Erikoistapauksena saamme analyyttisen funktion Taylor-sarjan.

Esimerkki 3.2.1. Funktiolle $f(z) = \frac{1}{1-z}$ muodostettiin Taylor-sarja kehityskeskukseksi origo Esimerkissä 3.1.2:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Tämä sarja suppenee arvoilla $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$. Funktiolle $f(z)$ voidaan muodostaa myös z :n negatiivisiin kokonaislukupotensseihin perustuva sarjakehitelmä seuraavasti:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (z \neq 0, 1).$$

Kyseinen sarja suppenee, kun $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, tai yhtäpitävästi, kun $|z| > 1$.

Niinpä funktiolla $f(z) = \frac{1}{1-z}$ on seuraavat sarjakehitelmät:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{kun } |z| < 1; \\ \frac{1}{1-z} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad \text{kun } |z| > 1. \end{aligned}$$

Lause 3.2.2. Rengasalueessa $r \leq |z - z_0| \leq R$ analyyttinen funktio voidaan esittää Laurent-sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ja integrointi suoritetaan vastapäivään pitkin renkaassa $r < |z - z_0| < R$ olevaa säännöllistä umpinaista käyrää C (kiertäen kerran z_0 :n ympäri). Ko. sarja suppenee kohti funktiota f ainakin rengasalueessa $r < |z - z_0| < R$.

Todistus. Yhdistetään reunakäyrät $\partial B_r(z_0)$ ja $\partial B_R(z_0)$ janalla, jolloin muodostuu umpinainen käyrä γ , joka ”kiertää kerran” renkaassa $0 < |z - z_0| < R$ olevan pisteen z ja jonka rajaamassa alueessa f on analyyttinen (piirrä kuva). Cauchy’n integraalikaavan (Lause 2.2.4) nojalla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: f_1(z) + f_2(z).$$

Kirjoitetaan

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \sum_{n=1}^k \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(\xi - z_0)^n} + \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z)(\xi - z_0)^k}.$$

Sijoittamalla tämä $f_1(z)$:n lausekkeeseen ja integroimalla termeittäin saadaan

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right)}_{=a_n \text{ (korvataan } \partial B_R(z_0) \text{ polulla } C)} (z - z_0)^n + \underbrace{\frac{(z - z_0)^k}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^k}}_{=: R_k(z)}.$$

Tässä $\left| \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right| \leq M < \infty \quad \forall \xi \in \partial B_R(z_0)$ (jatkuvana rajoitettu funktio), joten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |R_k(z)| \leq \frac{2\pi R M}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^k}_{<1} = 0.$$

Siis $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ja tämä sarja suppenee ainakin arvoilla $|z - z_0| < R$.

Toisaalta lähtemällä esityksestä $-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)}$ saadaan

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^k \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right)}_{=a_n \text{ (korvataan } \partial B_r(z_0) \text{ polulla } C)} (z - z_0)^{-n} + \underbrace{\frac{(z - z_0)^{-k}}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{(\xi - z_0)^k f(\xi) d\xi}{(z - \xi)}}_{=: \tilde{R}_k(z)}$$

ja tässä $\left| \frac{f(\xi)}{z - \xi} \right| \leq \tilde{M} < \infty, \quad \forall \xi \in \partial B_r(z_0)$, joten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{R}_k(z)| \leq \frac{2\pi r \tilde{M}}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{r}{|z - z_0|} \right)^k}_{<1} = 0.$$

Niinpä $f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n$ ja tämä sarja suppenee ainakin arvoilla $|z-z_0| > r$. Koska $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, väite on todistettu. $\square$

Huom. Lauseessa 3.2.2 esitetty Laurent-sarjan kertoimien a_n lausekkeet voidaan johtaa myös seuraavasti. Integroidaan sarja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ termeittäin ja sovelletaan Cauchy'n integraalilauseetta ja derivaattojen lauseketta:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C (z-z_0)^n dz \quad \underbrace{=}_{\text{Lause 2.2.1}} 0 + a_{-1} \oint_C \frac{dz}{z-z_0} + a_{-2} \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^2} + \dots \\ &= a_{-1} \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z-z_0}}_{=2\pi i, \text{Esim. 2.1.3}} + \underbrace{0+0+\dots}_{\text{derivaattojen esitys}} \end{aligned}$$

eli

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

Vastaavasti

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1},$$

antaa

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C (z-z_0)^{n-k-1} dz = a_k \oint_C \frac{dz}{z-z_0} = a_k 2\pi i$$

eli

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

Laurent-sarjan alkuperäistä *suppenemisrengasta voi laajentaa*: $r \downarrow$ ja $R \uparrow$ kunnes ao. ympyrän kehä saavuttaa pisteen, jossa funktio f ei ole enää analyyttinen. Eri-tyisesti, jos f on analyyttinen z_0 -keskisessä R -säteisessä pallossa $0 \leq |z-z_0| < R$, niin Laurent-sarjan negatiivisia indeksejä vastaavat kertoimet $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ ovat kaikki nollija Cauchy'n integraalilauseen (Lause 2.2.4) nojalla. Laurent-sarja antaa siten erikoistapauksena *pisteessä z_0 analyyttiselle funktiolle sen Taylor-sarjakehitelmän*. *Kiinteässä suppenemisrenkaassa funktion Laurent-sarjakehitelmä on yksikäsitteisesti määrätty*: jos sarjakehitelmät

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ ja } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

suppenevat samassa rengasalueessa $r < |z-z_0| < R$, niin $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Mikäli funktiolle f saadaan muodostettua ko. tyyppiä oleva suppeneva sarjakehitelmä, niin se on välttämättä ao. rengasalueessa funktion f Laurent-sarja, ts.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esimerkki 3.2.3. Sarjakehitelmä $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ suppenee arvoilla $0 \leq |z| < 1$. Kyseessä on funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Taylor-sarjakehitelmä eli Laurent-sarja, joka suppenee rengasalueessa, jossa $r = 0$ ja $R = 1$.

Toisaalta sarjakehitelmä $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-1/z)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$ suppenee arvoilla $|z| > 1$. Kyseessä on funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Laurent-sarja, joka suppenee rengasalueessa, jossa $r = 1$ ja $R = \infty$.

Esimerkkejä Taylor-sarjoista:

EkspONENTTIFUNKTIO

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ja sarja suppenee $\forall z \in \mathbb{C}$. Trigonometriset funktiot

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

ja molemmat sarjat suppenevat $\forall z \in \mathbb{C}$. Geometrinensarja

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

suppenee arvoilla $|z| < 1$ ($z \in \mathbb{C}$).

Logaritmi

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

suppenee arvoilla $|z| < 1$.

Huom! Taylor-sarjan tapauksessa kertoimet a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) voidaan laskea myös kaavalla $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Taylor-sarjoja voi käyttää apuna muodostettaessa funktioiden Laurent-sarjakehitelmiä.

Esimerkki 3.2.4.

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n \right) = z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{3!z} + \dots$$

Laurent-sarja pisteessä $z_0 = 0$, joka suppenee arvoilla $|z| > 0$.

3.3 Residy lause

Usein Laurent-sarja muodostetaan rengasalueessa $0 < |z - z_0| < R$, missä kehityskeskus z_0 on aina R -säteisen palloympäristön piste, jossa $f(z)$ ei ole analyttinen. Tarkastelun kohteena on tällöin erityisesti sellaiset funktiot, joiden Laurentin sarjoissa negatiivisia indeksejä vastaavista kertoimista vain äärellinen määrä on nollasta eroavia, ts. $f(z)$:n Laurent-sarja on muotoa

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z), \quad 0 = a_{-m-1} = a_{-m-2} = \dots,$$

missä

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{ja} \quad f_2(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}.$$

Kun tässä $a_{-m} \neq 0$, sanotaan että f :llä on m -kertainen napa pisteessä z_0 . Jos z_0 on f :n napa, niin $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. Funktion Laurent-sarjakehitelmän kerroin a_{-1} on erityisasemassa ja sitä sanotaan *funktion residyksi pisteessä z_0* , merk.

$$(3.1) \quad \text{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi.$$

Tätä voi hyödyntää mm. käyräintegraalien laskemisessa, jos funktion Laurent-sarja tunnetaan.

Esimerkki 3.3.1. Laske $\oint_C \frac{\sin z}{z^4} dz$, missä C on yksikköympyrän kehä. Funktion $\sin z$ Taylor-sarjakehitelmä antaa Laurent-sarjan

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \dots,$$

joka suppenee kun $|z| > 0$. Siten

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^4} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

Tässä $z = 0$ on $f(z)$:n 3-kertainen napa.

Usein funktion residy voidaan kuitenkin laskea muodostamatta sen Laurent-sarjaa. Tarkastellaan tilannetta, jossa *funktiolla on 1-kertainen napa pisteessä z_0* . Tällöin $m = 1$ ja

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (0 < |z - z_0| < R).$$

Nyt

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \dots \quad (0 < |z - z_0| < R),$$

joten

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z), \quad \text{kun } m = 1.$$

Jos $p(z)$ ja $q(z)$ ovat analyyttisiä pisteessä z_0 ja piste $z = z_0$ on q :n 1-kertainen nollakohta (eli $q(z_0) = 0$ ja $q'(z_0) \neq 0$) ja $p(z_0) \neq 0$, niin

$$(3.2) \quad \operatorname{Res}_{z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Nimittäin

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - 0}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Esimerkki 3.3.2.

$$\operatorname{Res}_{z_0=i} \left[\frac{9z+i}{z(z^2+1)} \right] = \left[\frac{9z+i}{3z^2+1} \right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

Lause 3.3.3. (Residy lause) Olkoon C paloittain säännöllinen umpinainen käyrä, jonka rajaamassa kompleksitason alueessa funktio f on analyyttinen lukuunottamatta pisteitä $z_1, z_2, \dots, z_k$, jotka ovat C :n sisäpuolella. Tällöin

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z_j} f(z).$$

Todistus. Lisätään jokaiseen pisteeseen z_j niitä ympäröivät ympyräkehät, jotka eivät leikkaa toisiaan ja sijaitsevat käyrän C rajaaman alueen sisäpuolella. Olkoon A se alue, joka on C :n sisäpuolella poislukien pisteitä $z_1, z_2, \dots, z_k$ ympäröivät ympyräalueet (ts. alueessa A on k ympyränmuotoista reikää: piirrä kuva). Tällöin f on analyyttinen A :ssa, joten $\oint_{\partial A} f(z) dz = 0$, missä alueen A reuna ∂A (ts. kaikki sen reunakäyrät) on positiivisesti suunnistettu (vrt. s. 17). Toisin sanoen

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{-C_1} f(z) dz + \oint_{-C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{-C_k} f(z) dz = 0$$

eli

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_k} f(z) dz,$$

missä käyrät $C_1, \dots, C_k$ on suunnistettu vastapäivään. Käyrän C_j ($j = 1, \dots, k$) sisäpuolella piste z_j on ainoa piste, jossa f ei ole analyyttinen, joten (katso (3.1))

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_j} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z_j} f(z), \quad j = 1, \dots, k.$$

Niinpä

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \operatorname{Res}_{z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z_2} f(z) + \dots + \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

□

Esimerkki 3.3.4. Lasketaan $\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz$ yli käyrän C , joka ympäröi pisteet $z_1 = 0$ ja $z_2 = 1$ eli integroitavan funktion navat. Napojen kertaluku on yksi, joten vastaavat residyt ovat

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z_1} \frac{4-3z}{z^2-z} &= \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=0} = -4, \\ \operatorname{Res}_{z_2} \frac{4-3z}{z^2-z} &= \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=1} = 1,\end{aligned}$$

katso (3.2). Lauseen 3.3.3 nojalla saamme

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz = 2\pi i [-4 + 1] = -6\pi i.$$

3.3.1 Residyn laskeminen m -kertaisessa navassa

Jos funktiolla $f(z)$ on m -kertainen napa pisteessä z_0 , niin sen Laurent-sarja z_0 :ssa on muotoa

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

missä $a_{-m} \neq 0$. Funktion $f(z)$ residy $\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$ voidaan tällöin laskea pisteessä z_0 seuraavasti. Merkitään

$$g(z) := (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}.$$

Tällöin

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) \right].$$

Esimerkki 3.3.5. Lasketaan Esim. 3.3.2 tulos yo. kaavalla, kun $m = 1$:

$$\operatorname{Res}_{z_0=i} \left[\frac{9z+i}{z(z^2+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{9z+i}{z(z^2+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{9z+i}{z(z+i)} \right] = \frac{10i}{2i^2} = -5i.$$

Esimerkki 3.3.6. Olkoot $f(z) = \frac{2z}{(z+2)(z-1)^2}$. Funktiolla f on navat pisteissä $z_1 = -2$, jonka kertalukuna on 1, ja $z_2 = 1$, jonka kertalukuna on 2. Siten

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{2z}{(z-1)^2} = -\frac{4}{9} \\ \operatorname{Res}_{z_2} f(z) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{2z}{z+2} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{2(z+2) - 2z \cdot 1}{(z+2)^2} \right] = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

3.3.2 Residy-lauseen sovelluksia

Olkoon $F(x, y)$ rationaalifunktio. Tällöin integraali

$$\int_0^{2\pi} F(\cos x, \sin x) dx$$

voidaan muuttujanvaihdoilla palauttaa käyräintegraaliksi yli yksikköympyrän kehän.

Merkitään $e^{ix} = z$, jolloin $\frac{dz}{dx} = ie^{ix} = iz \Leftrightarrow dx = \frac{dz}{iz}$. Koska

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \end{cases}$$

saamme muuttujanvaihdoilla

$$\int_0^{2\pi} F(\cos x, \sin x) dx = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz},$$

missä

$$f(z) = F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

on rationaalifunktio ja C on yksikköympyrän kehä suunnistettuna vastapäivään.

Esimerkki 3.3.7. Lasketaan $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2} - \cos x}$.

Sijoitus: $\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ja $dx = \frac{dz}{iz}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2} - \cos x} &= \oint_C \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}(z + 1/z)} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)} \\ &= 2i \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}. \end{aligned}$$

Tässä $z_1 = \sqrt{2} + 1$ on C :n ulkopuolella ja $z_2 = \sqrt{2} - 1$ on C :n sisäpuolella. Nyt

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{2i}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = \left[\frac{2i}{z - \sqrt{2} - 1} \right]_{z=\sqrt{2}-1} = -i,$$

joten

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2} - \cos x} = 2\pi i(-i) = 2\pi.$$

3.3.3 Rationaalifunktion epäoleellinen integraali

Olkoon $f(x) = p(x)/q(x)$ reaalinen rationaalifunktio. Oletetaan lisäksi, että

$$(3.3) \quad \begin{cases} \deg p \leq \deg q - 2; \\ q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tällöin integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ suppenee ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx.$$

Ko. epäoleellisen integraalin arvo voidaan laskea kompleksisen käyräintegraalin avulla Residy-lausetta käyttäen: Yhdistetään reaaliakselin pisteet R ja $-R$ puoliympyrän kaarella S_R , ympyrän keskipisteenä origo. Yhdessä reaaliakselilla sijaitsevan janan $[-R, R]$ kanssa muodostuu suljettu paloittain säännöllinen umpinainen käyrä, jonka rajaama alue on $\mathbb{C}$:n ylemmässä puolitasossa $\mathbb{C}_+$ sijaitseva R -säteinen puoliympyrä. (Piirrä kuva.)

Koska f on rationaalifunktio ja $q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, saadaan kompleksitason ylemmässä puolitasossa sijaitsevat q :n nollakohdat (ts. f :n kaikki $\mathbb{C}_+$:ssa sijaitsevat navat) z_j käyrän $C = [-R, R] \cup S_R''$ sisäpuolelle, kun R on riittävän suuri. Tällöin:

$$\oint_C f(z) = \int_{S_R} f(z)dz + \int_{-R}^R f(x)dx \stackrel{\text{Lause 3.3.3}}{=} 2\pi i \sum_{z_j \in \mathbb{C}_+, z_j: f:n \text{ napa}} \text{Res}_{z_j} f(z).$$

Osoitetaan, että $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$: Valitaan S_R :lle parametriesitys $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, jolloin $z'(t) = Rie^{it}$ ja

$$\int_{S_R} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{it}) Rie^{it} dt.$$

Tässä

$$|f(Re^{it}) \cdot Rie^{it}| = R |f(Re^{it})| \leq R \frac{k}{|z|^2},$$

kun säde R ja vakio $k > 0$ ovat riittävän suuria (syy: $\deg p \leq \deg q - 2$). Siten

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} f(z)dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^\pi \frac{k}{|z|^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k\pi}{R} = 0.$$

Johtopäätös:

$$(3.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left(\sum_{z_j \in \mathbb{C}_+, z_j: f:n \text{ napa}} \text{Res}_{z_j} f(z) \right).$$

Vastaavasti voidaan todistaa, että kun $f(x) = p(x)/q(x)$ toteuttaa annetut 2 ehtoa ((3.3)), niin kaikilla $s > 0$ pätee

$$(3.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \left(\sum_{z_j \in \mathbb{C}_+, z_j: f:n \text{ napa}} \text{Res}_{z_j} [f(z)e^{isz}] \right).$$

Todistus. Olkoon $z \in S_R$, missä S_R on puolin ympyrän kaari kuten yllä. Tällöin $z = x + iy$ ja $y \geq 0$ ja siten

$$|e^{isz}| = |e^{is(x+iy)}| = |e^{isx} \cdot e^{-sy}| = \underbrace{|e^{isx}|}_{=1} \cdot |e^{-sy}| \leq 1,$$

koska $-sy < 0$ ($s > 0$ ja $y \geq 0$). Niinpä

$$|f(z)e^{isz}| \leq |f(z)| \cdot |e^{isz}| \leq |f(z)|$$

ja kuten edellä päätetään, että

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} f(z)e^{isz} dz \right| = 0.$$

□

Kaava (3.5) on käyttökelpoinen ns. Fourier-integraalien laskemisessa. Reaali- ja imaginaariosiin siirtymällä saadaan kaavasta (3.5) reaalisia Fourier-integraaleja koskevat kaavat.

Seuraus 3.3.8. Olkoon $f(x) = p(x)/q(x)$ reaalinen rationaalifunktio, joka toteuttaa ehdot (3.3). Tällöin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(sx) dx &= -2\pi \left(\sum_{z_j \in \mathbb{C}_+, z_j: f:n \text{ napa}} \operatorname{Im} (\operatorname{Res}_{z_j} [f(z)e^{isz}]) \right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx) dx &= 2\pi \left(\sum_{z_j \in \mathbb{C}_+, z_j: f:n \text{ napa}} \operatorname{Re} (\operatorname{Res}_{z_j} [f(z)e^{isz}]) \right). \end{aligned}$$

Todistus. Sijoitetaan kaavaan (3.5) esitys $e^{isz} = \cos(sx) + i \sin(sx)$, mistä väite seuraa ottamalla reaali- ja imaginaariosat puolittain. □

Esimerkki 3.3.9. Osoitetaan, että $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Huomaa, että funktiolla $f(z) = 1/(1+z^4)$ on neljä yksinkertaista napaa: $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{-3\pi i/4}$ ja $z_4 = e^{-\pi i/4}$. Näistä vain navat z_1 ja z_2 sijaitsevat $\mathbb{C}_+$:ssa. Koska

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) &= \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_1} = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4} e^{\pi i/4} \\ \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) &= \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_2} = \frac{1}{4} e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4} e^{-\pi i/4}, \end{aligned}$$

saadaan kaavan (3.4) nojalla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} e^{\pi i/4} + \frac{1}{4} e^{-\pi i/4} \right) = \pi \frac{e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}}{2i} = \pi \sin(\pi/4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Luku 4: LAPLACE-MUUNNOS

4.1 Laplace-muunnoksen määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (tai $\mathbb{R}$) kompleks- tai reaaliarvoinen funktio. Funktion f Laplace-muunnos määritellään kaavalla

$$(4.1) \quad F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{tai yleisemmin } s \in \mathbb{C},$$

merk. myös $\mathcal{L}(f)$ tai $\mathcal{L}(f(t); s)$. Jotta $F(s)$ olisi hyvinmääritelty funktio, pitää määritelmässä (4.1) esiintyvän (epäoleellisen) integraalin supeta arvolla $s \in \mathbb{C}$. Koska integrointi suoritetaan yli välin $[0, \infty)$ ei funktion f saamat arvot negatiivisella reaaliakselilla vaikuta sen Laplace-muunnokseen. Siksi voidaan olettaa, että $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tai vaihtoehtoisesti asettaa $f(t) = 0$, kun $t < 0$.

Esimerkki 4.1.1. Tarkastellaan funktion $f(t) = 1$, $t \geq 0$, Laplace-muunnosta pisteessä $s \in \mathbb{R}$. Kun $s > 0$ nähdään, että

$$\mathcal{L}(f(t); s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s} \underbrace{=}_{s>0} 0 + \frac{1}{s},$$

sillä tässä $0 > -sT \rightarrow -\infty$ ja siten $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = 0$, kun $s > 0$. Jos $s = 0$, niin

$$\mathcal{L}(f(t); 0) = \int_0^\infty e^0 dt = \int_0^\infty 1 dt = \infty$$

ja jos $s < 0$, niin

$$\mathcal{L}(f(t); s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s} = \infty,$$

sillä tässä $0 < -sT \rightarrow +\infty$ ja siten $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = \infty$.

Esimerkki 4.1.2. Olkoon $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, a vakio. Vastaavalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä todetaan, että

$$(4.2) \quad \mathcal{L}(f(t); s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)T}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a},$$

kun $a - s < 0$ eli $s > a$. Arvoilla $s \leq a$ pätee $\mathcal{L}(f(t); s) = \infty$.

Yleisemmin, jos $s = x + iy \in \mathbb{C}$, niin funktion $f(t) = e^{at}$ Laplace-muunnos on määritelty vain arvoilla $x = \operatorname{Re} s > a$, sillä nyt kaavassa (4.2) termi $e^{(a-s)T}$ voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$e^{(a-s)T} = e^{(a-x-iy)T} = e^{-iyT} e^{(a-x)T},$$

missä $|e^{-iyT}| = 1$ (moduli) ja $0 > (a-x)T \rightarrow -\infty$, kun $x > a$ ja $T \rightarrow \infty$, jolloin $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a-x)T} = 0$ ja siten myös $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a-s)T} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-iyT} e^{(a-x)T} = 0$. Sensijaan arvoilla $x = \operatorname{Re} s \leq a$ määritelmässä (4.1) esiintyvän (epäoleellinen) integraali ei suppene.

Laplace muunnoksen olemassaolo edellyttää, että integraali $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ supenee pisteessä s . Seuraava tulos on usein riittävä.

Lause 4.1.3. Olkoon $f(t)$, $t \geq 0$, paloittain jatkuva ja oletetaan, että on olemassa reaaliset vakiot M ja k siten, että

$$(4.3) \quad |f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Tällöin f :n Laplace-muunnos $\mathcal{L}(f(t); s)$ on olemassa kaikilla arvoilla $s > k$.

Todistus. Koska f on paloittain jatkuva $f(t)e^{-st}$ on integroitava yli äärellisen pituisten välien. Lisäksi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \right| &\leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt \leq \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}dt = M \int_0^\infty e^{(k-s)t}dt \\ &= M \left[\frac{e^{(k-s)t}}{k-s} \right]_0^\infty = \frac{M}{k-s} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(k-s)T} - 1 \right] \underbrace{=}_{k-s < 0} \frac{M}{s-k} < \infty \end{aligned}$$

□

Todistus osoittaa, että kun annettu eksponentiaalinen kasvuehto (4.3) on voimassa, niin itse asiassa Laplace-muunnos $\mathcal{L}(f(t); s)$ voidaan laskea yleisemmin kompleksitasen pisteissä, jotka sijaitsevat puolitasossa $s = x + iy \in \mathbb{C}$, $x = \operatorname{Re} s > k$.

4.2 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Lause 4.2.1. Olkoot $\mathcal{L}(f(t); s)$ ja $\mathcal{L}(g(t); s)$ funktioiden f ja g Laplace-muunnoksia.

- (1) (Lineaarisuus) $\mathcal{L}(af(t) + bg(t); s) = a\mathcal{L}(f(t); s) + b\mathcal{L}(g(t); s)$, a, b vakioita
- (2) (Skaalaus) $\mathcal{L}(f(at); s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t); \frac{s}{a})$, $a > 0$
- (3) (Siirto oikealle) Olkoon $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ yksikköaskelfunktio eli ns. *Heavisiden* funktio. Tällöin $\mathcal{L}(u(t-t_0)f(t-t_0); s) = e^{-st_0}\mathcal{L}(f(t); s)$, $t_0 \geq 0$
- (4) (Eksponenttifunktiolla kertominen) $\mathcal{L}(e^{at}f(t); s) = \mathcal{L}(f(t); s-a)$, a vakio

Todistus. Harjoitustehtävä. Huom. Ominaisuudet voidaan johtaa kuten Lauseen 7.3.1 todistuksessa (tai mm. palauttamalla ne vastaaviin Fourier-muunnoksen ominaisuuksiin). □

4.2.1 Derivaatan Laplace-muunnos

Lause 4.2.2. Olkoon $f(t)$ derivoituva ja $f'(t)$ paloittain jatkuva, kun $t \geq 0$ ja oletetaan, että Lauseen 4.1.3 ehto on voimassa. Tällöin $f'(t)$:llä on Laplace-muunnos (arvoilla $s > k$, vrt. Lause 4.1.3) ja

$$\mathcal{L}(f'(t); s) = s\mathcal{L}(f(t); s) - f(0).$$

Todistus. Osittaisintegrointi antaa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t); s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} f(T)e^{-sT}}_{=0(*)} - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = -f(0) + s\mathcal{L}(f(t); s). \end{aligned}$$

(*)-n perustelu: $|f(T)e^{-sT}| \leq e^{-sT} Me^{kT} = Me^{(k-s)T} \rightarrow 0$ jos $T \rightarrow \infty$, kun $k - s < 0$. $\square$

Saatu kaava voidaan yleistää korkeamman kertaluvun derivaatoille. Olkoot $f(t)$, $f'(t)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(t)$ jatkuvia ja $f^{(n)}(t)$ paloittain jatkuva sekä Lauseen 4.1.3 ehto voimassa. Tällöin

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t); s) = s^n \mathcal{L}(f(t); s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f''(t); s) &\stackrel{\text{Lause 4.2.2}}{=} s\mathcal{L}(f'(t); s) - f'(0) \stackrel{\text{Lause 4.2.2}}{=} s[s\mathcal{L}(f(t); s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}(f(t); s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Esitetty kaava $\mathcal{L}(f^{(n)}(t); s)$:lle saadaan suoraan toistamalla Lauseen 4.2.2 tulosta n kertaa (funktioihin $f^{(n)}(t)$, $f^{(n-1)}(t)$, $\dots$, $f''(t)$, $f'(t)$).

Esimerkki 4.2.3. Lasketaan funktion $f(t) = t^2$ Laplace-muunnos. Koska $f''(t) = 2$ ja $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ sekä Esimerkin 4.1.1 nojalla $\mathcal{L}(1; s) = \frac{1}{s}$, saadaan derivaatan muuntokaavasta yhtälö

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{s} &= \mathcal{L}(f''(t); s) = s^2\mathcal{L}(f(t); s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f(t); s) \\ \iff \mathcal{L}(f(t); s) &= \frac{2}{s^3}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.2.4. Olkoon $f(t) = \cos(at)$. Lasketaan f :n Laplace-muunnos. Nyt $f'(t) = -a \sin(at)$ ja $f''(t) = -a^2 \cos(at) = -a^2 f(t)$. Derivaatan muuntokaava antaa yhtälön

$$\begin{aligned} -a^2\mathcal{L}(f(t); s) &= \mathcal{L}(f''(t); s) = s^2\mathcal{L}(f(t); s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f(t); s) - s \\ \iff (s^2 + a^2)\mathcal{L}(f(t); s) &= s \\ \iff \mathcal{L}(f(t); s) &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.2.5. Olkoon $f(t) = t \sin(at)$. Lasketaan f :n Laplace-muunnos.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sin(at) + at \cos(at) \\ f''(t) &= a \cos(at) + a \cos(at) - a^2 t \sin(at) = 2a \cos(at) - a^2 f(t). \end{aligned}$$

Lisäksi $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 0$. Derivaatan muuntokaava antaa nyt

$$(4.4) \quad \mathcal{L}(f''(t); s) = s^2 \mathcal{L}(f(t); s) - sf(0) - f'(0) = s^2 \mathcal{L}(f(t); s)$$

ja yhtälöstä $f''(t) = 2a \cos(at) - a^2 f(t)$ saadaan

$$(4.5) \quad \mathcal{L}(f''(t); s) = 2a \mathcal{L}(\cos(at); s) - a^2 \mathcal{L}(f(t); s) \quad \underbrace{=}_{\text{Esim. 4.2.4}} \quad 2a \frac{s}{s^2 + a^2} - a^2 \mathcal{L}(f(t); s).$$

Yhdistämällä (4.4) ja (4.5) saadaan edelleen yhtälö

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}(f(t); s) &= \frac{2as}{s^2 + a^2} - a^2 \mathcal{L}(f(t); s) \\ \iff \mathcal{L}(f(t); s) &= \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

4.2.2 Integraalin Laplace-muunnos

Lause 4.2.6. Olkoon $f(t)$ paloittain jatkuva, kun $t \geq 0$, ja oletetaan, että Lauseen 4.1.3 ehto on voimassa. Tällöin

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du; s\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t); s).$$

Todistus. Merkitään $F(t) = \int_0^t f(u) du$. Tällöin $F(t)$ on jatkuva ja $F'(t) = f(t)$ eli $F(t)$ paloittain jatkuvasti derivoituva. Lisäksi $F(0) = 0$, joten Lauseen 4.2.2 nojalla

$$\mathcal{L}(f(t); s) = s \mathcal{L}(F(t); s) - F(0) = s \mathcal{L}(F(t); s).$$

□

Esimerkki 4.2.7. Olkoon $\mathcal{L}(f(t); s) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)}$. Tehtävänä on etsiä funktio $f(t)$, jonka Laplace-muunnos on oikealla puolella oleva rationaalifunktio (ts. laskea ko. rationaalifunktion Laplace-käänteismuunnos). Esimerkin 4.5 nojalla $\mathcal{L}(\cos(at); s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$. Siten Lauseen 4.2.6 nojalla

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \cos(au) du; s\right) = \frac{1}{s^2 + a^2}$$

ja tässä $\int_0^t \cos(au) du = \left[\frac{\sin(au)}{a}\right]_0^t = \frac{\sin(at)}{a}$ (ts. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}; t\right) = \frac{\sin(at)}{a} \iff \mathcal{L}(\sin(at); s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$). Edelleen Lauseen 4.2.6 nojalla

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin(au)}{a} du; s\right) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)}$$

ja tässä

$$f(t) := \int_0^t \frac{\sin(au)}{a} du = \left[-\frac{\cos(au)}{a^2} \right]_0^t = \frac{1}{a^2}(1 - \cos(at)).$$

$$\text{Ts. } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+a^2)}; t\right) = \frac{1}{a^2}(1 - \cos(at)).$$

4.2.3 Laplace-muunnoksen derivaatta ja integraali

Merkitään $F(s) = \mathcal{L}(f(t); s)$. Määritelmän mukaan

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Derivoimalla s :n suhteen saadaan

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \underset{(*)}{=} \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt.$$

Kohdassa $(*)$ derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto on sallittua (- tätä emme tässä tarkemmin perustele). Siten

$$F'(s) = -\mathcal{L}(tf(t); s).$$

Toistamalla samaa päättelyä n kertaa saadaan seuraava tulos.

Lause 4.2.8. Jos $f(t)$ on paloittain jatkuva, kun $t \geq 0$, ja $F^{(n)}(s)$ on olemassa, niin

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f(t); s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t); s).$$

Tuloksen voi muotoilla yhtäpitävästi muodossa: (polynomilla t^n kertominen)

$$\mathcal{L}(t^n f(t); s) = (-1)^n F^{(n)}(s),$$

missä $F(s) = \mathcal{L}(f(t); s)$.

Esimerkki 4.2.9.

$$\mathcal{L}(t \cos(t); s) = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cos(t); s) \underset{\text{Esimerkki (4.2.4)}}{=} (-1) \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Lause 4.2.10. Jos $f(t)$ on paloittain jatkuva, $t \geq 0$, ja funktiolla $f(t)/t$, $t > 0$, on Laplace-muunnos, niin

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t} f(t); s\right) = \int_s^\infty F(u) du,$$

missä $F(s) = \mathcal{L}(f(t); s)$.

Todistus.

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)du &= \int_s^\infty \int_0^\infty f(t)e^{-ut}dtdu = \int_0^\infty f(t) \left(\int_s^\infty e^{-ut}du \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[-\frac{e^{-ut}}{t} \right]_s^\infty dt = \int_0^\infty f(t) \frac{1}{t} \left[\lim_{U \rightarrow \infty} -e^{-Ut} + e^{-st} \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t); s\right)\end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.2.11. Lasketaan funktion $f(t) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du$ Laplace-muunnos. Koska $\mathcal{L}(\sin(t); s) = \frac{1}{s^2+1}$ (kts. Esimerkki 4.2.7), saadaan Lauseen 4.2.10 nojalla

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}; s\right) = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \left[-\arctan\left(\frac{1}{u}\right) \right]_s^\infty = \arctan\left(\frac{1}{s}\right) - \lim_{S \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{1}{S}\right) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

(Huomaa, että $\frac{d}{dy} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}} \left(-\frac{1}{y^2}\right)$.) Lopuksi sovelletaan Lausetta 4.2.6

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du; s\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left(\frac{\sin(u)}{u}; s\right) = \frac{1}{s} \arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

4.2.4 Jaksollisen funktion Laplace-muunnos

Lause 4.2.12. Olkoon $f(t)$ paloittain jatkuva, kun $t \geq 0$, ja Lauseen 4.1.3 ehto voimassa. Jos $f(t)$ on T -jaksollinen eli $f(t+T) = f(t)$, niin

$$\mathcal{L}(f(t); s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Todistus.

$$\mathcal{L}(f(t); s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Tässä

$$\begin{aligned}\int_T^\infty f(t)e^{-st}dt &\stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty f(u+T)e^{-s(u+T)}du \\ &= e^{-sT} \int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-sT} \mathcal{L}(f(t); s),\end{aligned}$$

missä suoritettiin muuttujanvaihto $t = u + T$ kohdassa (*). Siten $\mathcal{L}(f(t); s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + e^{-sT} \mathcal{L}(f(t); s)$, mistä väite seuraa. □

4.2.5 Konvoluution Laplace-muunnos

Lause 4.2.13. Olkoot $f(t)$ ja $g(t)$ paloittain jatkuvia, kun $t \geq 0$ ja oletetaan, että $f(t)$ ja $g(t)$ toteuttavat Lauseen 4.1.3 ehdon. Tällöin

$$\mathcal{L}((f * g)(t); s) = \mathcal{L}(f(t); s) \mathcal{L}(g(t); s),$$

missä $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$.

Huomaa, että tässä $g(u) = 0$, kun $u < 0$ ja $f(t-u) = 0$, kun $t-u < 0$.

Todistus.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(v); s) \mathcal{L}(g(u); s) &= \int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv \int_0^\infty g(u)e^{-su}du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(v)g(u)e^{-s(u+v)}dudv =: I \end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto $t = u + v$, jolloin $dt = dv$, ja

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)e^{-st}dudt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-u)g(u)du \right) e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}((f * g)(t); s). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.2.14. Integraalin Laplace-muunnos konvoluutiona: vrt. Lause 4.2.6. Kirjoitetaan

$$\int_0^t f(u)du = \int_0^t 1 \cdot f(u)du = \int_0^t 1(t-u) \cdot f(u)du = (1 * f)(t).$$

Koska $\mathcal{L}(1; s) = \frac{1}{s}$, saadaan Lauseen 4.2.13 nojalla

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du; s\right) = \mathcal{L}(1; s) \mathcal{L}(f(t); s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t); s).$$

Esimerkki 4.2.15. Määrittävä $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}; t\right)$. Esimerkin 4.2.7 mukaan $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+a^2)}; t\right) = \frac{1}{a^2}(1 - \cos(at))$ ja toisaalta Esimerkin 4.1.1 mukaan $f(t) := \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}; t\right) = 1$, kun $t \geq 0$. Siten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s^2+a^2)}; t\right) &\stackrel{\text{Lause 4.2.13}}{=} (f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot \frac{1}{a^2}(1 - \cos(au))du \\ &= \left[\frac{u}{a^2} - \frac{\sin(au)}{a} \right]_0^t = \frac{1}{a^2} \left(t - \frac{\sin(at)}{a} \right). \end{aligned}$$

Esimerkki 4.2.16.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}; t\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}; t\right) = (1 * (1 * 1))(t) = \int_0^t 1 \cdot \left(\int_0^u 1 \cdot 1dv \right) du \\ &= \int_0^t [v]_0^u du = \int_0^t u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

4.2.6 Raja-arvo-ominaisuuksia

Lause 4.2.17. Oletetaan, että $f(t)$ toteuttaa Lauseen 4.1.3 ehdot. Olkoon $F(s) = \mathcal{L}(f(t); s)$. Tällöin

- (1) $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$
- (2) $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$, ns. alkuarvo-ominaisuus
- (3) $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, ns. päätearvo-ominaisuus

Todistus. (1)

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st} dt \stackrel{\text{Lause 4.1.3}}{=} M \int_0^\infty e^{kt} e^{-st} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{(k-s)t} dt = M \left[\frac{e^{(k-s)t}}{k-s} \right]_0^\infty = \frac{M}{k-s} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(k-s)T} - 1 \right] = \frac{M}{s-k} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(2) Lauseen 4.2.2 nojalla

$$\mathcal{L}(f'(t); s) = s\mathcal{L}(f(t); s) - f(0) = sF(s) - f(0).$$

Toisaalta kohdan (1) mukaan $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f'(t); s) = 0$, joten

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0) \\ &\iff \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0). \end{aligned}$$

(3) Harjoitustehtävä. □

4.3 Laplace-käänteismuunnos ja yhteys Fourier-muunnokseen

Kun asetamme $f(t) = 0$ arvoilla $t < 0$, saamme esitettyä Laplace-muunnoksen ja ns. Fourier-muunnoksen (jota käsitellään tarkemmin vasta tuonnenpana) välisen yhteyden:

$$\mathcal{F}(f(t); s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-ist} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-ist} dt = \mathcal{L}(f(t); is)$$

tai yhtäpitävästi $\mathcal{L}(f(t); s) = \mathcal{F}(f(t); -is)$ ($s \in \mathbb{R}$).

Esimerkki 4.3.1. Olkoon $f(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$ ja $f(t) = 0$, $t < 0$. Tällöin lähtemällä kaavasta $\mathcal{L}(f(t); s) = \frac{1}{s+a}$, $s > -a$, saadaan Fourier-muunnoskaava $\mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{L}(f(t); iw) = \frac{1}{a+iw}$; katso Taulukko A.2. Kääntäen

$$\mathcal{L}(f(t); s) = \mathcal{F}(f(t); -is) = \frac{1}{a - i^2 s} = \frac{1}{a + s},$$

kun $s > -a$.

Laplace- ja Fourier-muunnoksen välisestä yhteydestä seuraa, että Fourier-muunnoksella on samankaltaisia ominaisuuksia kuin Laplace-muunnoksella.

Laplace-muunnoksella on käänteismuunnos. Se määritellään kaavalla

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s); t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{ts} ds,$$

missä vakio $c \in \mathbb{R}$ pyritään valitsemaan niin, että kyseinen integraali suppenee. Kaavaan päädytään Fourier-muunnoksen avulla seuraavasti: Olkoon $F(s)$ funktion $f(t)$ Laplace-muunnos. Käyttämällä Fourier-muunnosta ja sen yhteyttä Laplace-muunnokseen,

$$\mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{L}(f(t); iw) = F(iw),$$

sekä Fourier-käänteismuunnosta saadaan

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t); w); t) = \mathcal{F}^{-1}(F(iw); t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(iw) e^{iwt} dw.$$

Muuttujanvaihto $s = iw$, jolloin $\begin{cases} dw = \frac{ds}{i} \\ \pm\infty \rightarrow \pm i\infty \end{cases}$, antaa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Perustelu osoittaa, että kun f :n Laplace-muunnokseen suoritetaan Laplace-käänteismuunnos, saadaan alkuperäinen funktio f (lukuunottamatta ns. nollamittaista $\mathbb{R}$:n osajoukkoa), ts.

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(t); s); t) = f(t),$$

kun $f(t)$ ja $F(s)$ ovat esimerkiksi jatkuvia ja integroituvia funktioita.

4.3.1 Laplace-käänteismuunnoksen laskeminen

Osamurtomenetelmä on eräs käyttökelpoinen tapa laskea Laplace-käänteismuunnos *rationaalifunktioille*. Tällöin annettu rationaalifunktio esitetään osamurtokehityksen avulla yksinkertaisempien rationaalifunktioiden avulla ja tehtäväksi jää kunkin osan käänteismuunnoksen selvittäminen erikseen taulukoita apuna käyttäen. Osamurtokehityksen muodostamista on käsitelty mm. matemaattiset menetelmät I-kurssilla. Tarkastellaan menetelmää esimerkkien avulla.

Esimerkki 4.3.2. Lasketaan funktion $F(s) = \frac{1}{s^2-1}$ Laplace-käänteismuunnos. Muodostetaan osamurtokehityelmä:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2-1} &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} \\ \iff 1 &= A(s-1) + B(s+1) = (A+B)s + (B-A), \\ \iff \begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ts. $\frac{1}{s^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$. Tässä $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}; t\right) = e^{-t}$ ja $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}; t\right) = e^t$ (vrt. Esimerkki 7.2.1). Siten lineaarisuuden nojalla:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}; t\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}; t\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}; t\right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} (= \sinh(t)).$$

Esimerkki 4.3.3. Lasketaan funktion $F(s) = \frac{s^2}{s^2-9}$ Laplace-käänteismuunnos. Suoriteetaan ensin jakolasko niin, että osoittajan asteluku saadaan nimittäjän astelukua pienemmäksi:

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2-9} = \frac{s^2-9+9}{s^2-9} = 1 + \frac{9}{s^2-9}.$$

Jaetaan sitten jälkimmäinen rationaalifunktio osamurtoihin:

$$\frac{9}{s^2-9} = \frac{9}{(s+3)(s-3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3}.$$

Kuten edellä saadaan: $A = -\frac{3}{2}$ ja $B = \frac{3}{2}$ eli

$$\frac{9}{s^2-9} = -\frac{3}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-3}.$$

Tässä $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}; t\right) = e^{-3t}$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}; t\right) = e^{3t}$ ja $\mathcal{L}^{-1}(1; t) = \delta(t)$ (Diracin deltafunktio Taulukko B). Siten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{s^2-9}; t\right) &= \mathcal{L}^{-1}(1; t) - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}; t\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}; t\right) \\ &= \delta(t) + 3\frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} = \delta(t) + 3\sinh(3t).\end{aligned}$$

4.3.2 Residy-menetelmä

Residy-menetelmä Laplace-käänteismuunnoksen laskemiseksi on osamurtomenetelmää käyttökelpoisempi ja usein myös muutoinkin suoraviivaisempi. Se perustuu residylauseeseen käyttöön (vrt. kompleksianalyysin kurssi). Menetelmän voi kiteyttää seuraavasti: Olkoon $F(s)$ analyyttinen funktio kompleksitasossa lukuunottamatta äärellistä määrää erillisiä napoja $a_1, a_2, \dots, a_N$ (jolloin $\lim_{s \rightarrow a_j} F(s) = \infty$, $s = 1, \dots, N$). Tällöin

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s); t) = \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{s=a_j} \{F(s)e^{st}\}.$$

Kaava perustuu yhtälöihin ($s \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(F(s); t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{ts} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(s)e^{ts} ds \\ &\underbrace{=}_{\text{Residy-Lause}} \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{s=a_j} \{F(s)e^{st}\}.\end{aligned}$$

(Tässä C on umpinainen käyrä, joka koostuu pisteiden $c - iK$, $c + iK$ yhdysjanasta ja niitä yhdistävästä ympyränkaaresta.)

Erityisesti, kun $F(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$, $\deg(R) < \deg(Q) - 1$, on rationaalifunktio, jossa $R(s)$ ja $Q(s)$ ovat keskenään jaottomia polynomeja ja $Q(s)$:n nollakohdat (eli $F(s)$:n navat) ovat yksinkertaisia (ts. $Q(a_j) = 0$, $R(a_j) \neq 0$ ja $Q'(a_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, N$) saa yo. kaava muodon:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{R(s)}{Q(s)}; t \right) = \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{s=a_j} \left\{ \frac{R(s)}{Q(s)} e^{st} \right\} = \sum_{j=1}^N \frac{R(a_j)}{Q'(a_j)} e^{a_j t},$$

missä $\deg(R) < \deg(Q) - 1$: Vrt. Kompleksianalyysin materiaali.

Esimerkki 4.3.4. Funktion $F(s) = \frac{1}{s^2-1}$ navat ovat $s = \pm 1$. Nyt residy-menetelmällä saadaan $F(s)$:n käänteismuunnos

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2-1}; t \right) = \left[\frac{1}{2s} e^{st} \right]_{s=1} + \left[\frac{1}{2s} e^{st} \right]_{s=-1} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t).$$

Tässä esimerkissä $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ on *hyperbolinen sinifunktio*. Vastaavasti *hyperbolisen kosinifunktion* määrittelee lauseke $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Esimerkki 4.3.5. Lasketaan residy-menetelmällä funktion $\frac{s}{s^2+a^2}$ Laplace-käänteismuunnos.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+a^2}; t \right) &= \operatorname{res}_{s=ia} \left\{ \frac{se^{st}}{s^2+a^2} \right\} + \operatorname{res}_{s=-ia} \left\{ \frac{se^{st}}{s^2+a^2} \right\} = \frac{iae^{iat}}{2ia} + \frac{-iae^{-iat}}{-2ia} \\ &= \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} = \cos(at). \end{aligned}$$

Edellä olevissa esimerkkeissä napojen kertaluvut olivat ykkösiä. Tarkastellaan residy-menetelmää korkeampikertaisen navan tapauksessa.

Esimerkki 4.3.6. Lasketaan residy-menetelmällä $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2}; t \right)$. Tässä $F(s)$:llä on 2-kertainen napa origossa.

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2}; t \right) = \operatorname{Res}_{s=0} \left\{ \frac{e^{st}}{s^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s^2 e^{st}}{s^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \{ e^{st} \} = \lim_{s \rightarrow 0} t e^{st} = t.$$

(Huomaa, että $\frac{e^{st}}{s^2} = \frac{1}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!} = \frac{1}{s^2} + \frac{t}{s} + \frac{t^2}{2!} + \frac{st^3}{3!} + \dots$, mistä residy saadaan myös suoraan määritelmän nojalla tekijään $\frac{1}{s}$ liittyvänä kertoimena $a_{-1} = t$.)

4.4 Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksella

Laplace-muunnoksen avulla voidaan kätevästi ratkaista differentiaal- ja osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Menetelmän kannalla keskeinen on derivaatan Laplace-muunnosta koskeva kaava (vrt. Lause 4.2.2):

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t); s) = s^n \mathcal{L}(f(t); s) - s^{(n-1)} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Tarkastelemme esimerkkeinä vakiokertoimisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista.

Epähomogeeminen 1. kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'(t) + ay(t) = f(t).$$

Tässä $f(t)$ on annettu ja $y(t)$ on etsittävä funktio, joka toteuttaa annetun differentiaaliyhtälön. Ottamalla yhtälöstä *puolittain* Laplace-muunnos saadaan

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = F(s),$$

missä $Y(s) = \mathcal{L}(y(t); s)$ ja $F(s) = \mathcal{L}(f(t); s)$. Yhtäpitävästi

$$(4.6) \quad Y(s) = \frac{y(0)}{s+a} + \frac{F(s)}{s+a}.$$

Funktio $\frac{1}{s+a}$ on funktion e^{-at} Laplace-muunnos. Lauseen 4.2.13 nojalla funktion $\frac{F(s)}{s+a}$ on e^{-at} :n ja $f(t)$:n konvoluution $(e^{-at} * f)(t)$ Laplace-muunnos. Siten Laplace-muunnoksen lineaarisuuden nojalla

$$Y(s) = \mathcal{L}([y(0)e^{-at} + (e^{-au} * f(u))(t)]; s),$$

jolloin (ottamalla Laplace-käänteismuunnos)

$$y(t) = y(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-au} f(t-u) du.$$

Havaitsemme, että saatu $y(t)$:n lauseke on itse asiassa alkuarvotehtävään

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \quad y(0) = y_0$$

liittyvä ratkaisukaava, jonka voi kirjoittaa myös muodossa

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-au} f(t-u) du = e^{-at} \left(y_0 + \int_0^t e^{au} f(u) du \right),$$

missä on käytetty konvoluutiotulon vaihdannaisuutta, kts. Lause 7.5.1. Kyseinen ratkaisukaava on esitetty Mat. peruskurssilla (sitä ei siellä kuitenkaan johdettu).

Esimerkki 4.4.1. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Laplace-muunnos puolittain antaa yhtälön

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = 0,$$

missä $Y(s) = \mathcal{L}(y(t); s)$. Sijoitetaan $y(0) = 1$ ja ratkaistaan $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Käänteismuunnos antaa nyt suoraan haetun ratkaisun

$$y(t) = e^{-t}.$$

Esimerkki 4.4.2. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}, \quad y(1) = 0.$$

Laplace-muunnos puolittain antaa yhtälön

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = \frac{2}{s+1}.$$

siten

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+3} + \frac{2}{(s+3)(s+1)}.$$

Muodostamalla osamurtohajotelma saadaan edelleen

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+3} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+1} + \frac{(y(0)-1)}{s+3},$$

mistä nähdään, että

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}; t\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{y(0)-1}{s+3}; t\right) = e^{-t} + (y(0)-1)e^{-3t}.$$

Edelleen alkuehdon $y(1) = 0$ nojalla on oltava

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = e^{-1} + (y(0)-1)e^{-3} \\ \iff y(0)-1 &= -\frac{e^{-1}}{e^{-3}} = -e^2. \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä $y(t)$:n lausekkeeseen saadaan lopullinen vastaus

$$y(t) = e^{-t} + (e^2)e^{-3t} = e^{-t} - e^{-3t+2}.$$

Esimerkki 4.4.3. Ns. RL-piirin (kts. kuva) virta $i(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) = e(t),$$

missä L = kela, R = vastus ja e = lähdejännite. Määritetään RL-piirin virta (ts. ratkaistaan ko. differentiaaliyhtälö), kun $i(0) = 0$ ja lähdejännite $e(t) = E_0$ on vakio. Laplace-muunnos antaa

$$L(sI(s) - \underbrace{i(0)}_{=0}) + RI(s) = \frac{E_0}{s}.$$

Ratkaistaan $I(s) = \mathcal{L}(i(t); s)$:

$$I(s) = \frac{E_0}{(Ls+R)s} \underbrace{=}_{\text{osamurto hajotelma}} \frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L} \right)$$

Tästä saadaan käännteismuunnoksella vastaus

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t).$$

Ottamalla puolittain Laplace-muunnos saadaan

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + a(sY(s) - y(0)) + bY(s) = F(s)$$

ja edelleen ratkaisemalla $Y(s) = \mathcal{L}(y(t); s)$:

$$(4.7) \quad Y(s) = \frac{y(0)(s+a) + y'(0) + F(s)}{s^2 + as + b}.$$

Tästä käänteismuunnos antaa yleisen ratkaisukaavan

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{y(0)(s+a) + y'(0)}{s^2 + as + b}; t \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{F(s)}{s^2 + as + b}; t \right),$$

missä ensimmäinen termi antaa homogeenisen yhtälön ratkaisun ja toinen termi antaa epähomogeenisen yhtälön ($y(0) = y'(0) = 0$) yksityisratkaisun.

Esimerkki 4.4.4. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Laplace-muunnos puolittain antaa

$$s^2Y(s) - s \underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

eli

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{1}{(s+1)((s+1)^2+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}. \end{aligned}$$

Ottamalla Laplace-käänteismuunnos ja käyttämällä Taulukkoa B sekä Lauseen 4.2.1 kohtaa (4) saadaan

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+1}; t \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}; t \right) = e^{-t} - e^{-t} \cos(t) = e^{-t}(1 - \cos(t)).$$

Esimerkki 4.4.5. Määrättävä differentiaaliyhtälön

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 10e^{-3t}$$

ratkaisun $y(t)$ raja-arvo $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, kun tiedetään, että se on olemassa.

Laplace-muunnos antaa

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) &= \frac{10}{s+3} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{\frac{10}{s+3} + (s+6)y(0) + y'(0)}{s^2 + 6s + 9}. \end{aligned}$$

Ko. raja-arvo saadaan nyt soveltamalla Lauseen 4.2.17 kohtaa (2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{10s}{s+3} + s(s+6)y(0) + sy'(0)}{(s+3)^2} \right] = 0.$$

4.5 Integraaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksella

Integraaliyhtälöissä tuntematon funktio esiintyy osana integroitavaa funktiota. Tyypillinen lineaarinen integraaliyhtälö on muotoa

$$(4.8) \quad a(t)y(t) + \int_{\alpha}^{\beta} K(t, u)y(u)du = f(t).$$

Funktiota $K(t, u)$ sanotaan integraaliyhtälön *ytimeksi*. Yhtälöä (4.8) sanotaan *homogeeniseksi*, jos $f(t) \equiv 0$. Jos kerroinfunktio $a(t) \neq 0$, kutsutaan yhtälöä (4.8) *toisen lajin integraaliyhtälöksi* tai ns. *Fredholmin integraaliyhtälöksi*. Jos $a(t) \equiv 0$, saadaan ns. *ensimmäisen lajin integraaliyhtälö*:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(t, u)y(u)du = f(t).$$

Käsittelemme yhtälön (4.8) erikoistapausta, jossa ko. integraalitermi on kahden funktion konvoluutio:

$$(4.9) \quad ay(t) + \int_0^t h(t-u)y(u)du = f(t).$$

(Tässä lisäksi kerroin a on vakio.) Kyseessä on itse asiassa ns. Volterran integraaliyhtälön erikoistapausta. Tämä yhtälö voidaan ratkaista Laplace-muunnoksen avulla käyttämällä *apuna konvoluutioteoremaa* (Lause 4.2.13). Yhtälö (4.9) muuntuu Laplace-muunnoksessa muotoon

$$aY(s) + H(s)Y(s) = F(s),$$

missä $H(s) = \mathcal{L}(h(t); s)$. Tästä saadaan ratkaisemalla

$$Y(s) = \frac{F(s)}{a + H(s)}$$

ja edelleen

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{F(s)}{a + H(s)}; t \right).$$

(Edellyttäen, että kaikki yo. muunnokset ovat olemassa.)

Esimerkki 4.5.1. Ratkaistaan 1.lajin integraaliyhtälö

$$\int_0^t e^{-(t-u)} y(u) du = 2t.$$

Laplace-muunnos antaa yhtälön

$$\frac{Y(s)}{s+1} = \frac{2}{s^2},$$

kts. Taulukko B. Siten

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{s^2} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2}.$$

Ottamalla käänteismuunnos saadaan edelleen, kts. Taulukko B,

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}; t\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}; t\right) = 2(1+t).$$

Esimerkki 4.5.2. Ratkaistaan 2. lajin integraaliyhtälö

$$2y(t) + \int_0^t \cos(t-u)y(u)du = \sin(t).$$

Laplace-muunnos puolittain antaa yhtälön

$$\begin{aligned} 2Y(s) + \frac{s}{s^2+1}Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ \iff Y(s) &= \frac{1}{2s^2+s+2} \\ \iff y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2s^2+s+2}; t\right) = \frac{2}{\sqrt{15}}e^{-\frac{t}{4}}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right), \end{aligned}$$

missä on käytetty Taulukon B kaavaa (5) ja Lauseen 4.2.1 kohtaa (4).

Kun integraaliyhtälö (4.8) tai (4.9) sisältää lisäksi tuntemattoman funktion derivaattoja, sanotaan ko. yhtälöä *integro-differentiaaliyhtälöksi*.

Esimerkki 4.5.3. Ns. RLC-piirin (kts. kuva) virta $i(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$L\frac{d^2}{dt^2}i(t) + R\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{d}{dt}e(t).$$

Integroimalla ajan t suhteen ko. differentiaaliyhtälö muuntuu integro-differentiaaliyhtälöksi

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = e(t).$$

Ratkaistaan tämä yhtälö Laplace-muunnoksen avulla:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + RI(s) + \underbrace{\frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}}_{\text{Lause 4.2.6}} &= E(s) \\ \iff I(s) &= i(0)\frac{LCs}{LCs^2 + RCs + 1} + \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}E(s). \end{aligned}$$

4.6 Siirtofunktio

Laplace-muunnoksia ja seuraavassa luvussa käsiteltäviä $\mathcal{Z}$ -muunnoksi käytetään paljon tekniikan sovelluksissa. Usein ne esiintyvät lineaaristen *input-output-systeemien* yhteydessä. Tilannetta havainnollistaa seuraava kaavio

$$x(t) \rightarrow [\text{LTI-systeemi}] \rightarrow y(t)$$

Tässä $x(t)$ on *systeemin input eli heräte tai syöte* ja $y(t)$ on *systeemin output eli vaste tai tulosuure*.

LTI-systeemin (Linear Time Invariant system) toimintaa kuvataan funktiolla $g(t)$, jota kutsutaan systeemin *impulssivasteeksi*. Tällöin systeemin *vaste* $y(t)$ saadaan *impulssivasteen ja herätteen $x(t)$ konvoluutiona*: $y(t) = (g * x)(t)$ eli

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)x(t-u)du$$

tai

$$y(t) = \int_0^t g(u)x(t-u)du,$$

jos $g(t) = x(t) = 0$, kun $t < 0$. Laplace-muunnos muuntaa jälkimmäisen yhtälön muotoon

$$Y(s) = G(s)X(s).$$

Ts. vasteen $y(t)$ Laplace-muunnos $Y(s)$ saadaan impulssivasteen $g(t)$ Laplace-muunnoksen $G(s)$ ja herätteen $x(t)$ Laplace-muunnoksen tulona. *Systeemin rakennetta kuvaavaa funktiota*

$$\mathcal{G}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \left(= \frac{\mathcal{L}(\text{output})}{\mathcal{L}(\text{input})} \right)$$

kutsutaan systeemin *siirtofunktioksi*. Tässä oletetaan, että $x(t)$ ja $y(t)$ ovat *nolla-alkuarvoisia*; ts. että niiden arvot ja mahdolliset derivaattojen arvot pisteessä $t = 0$ (lähtöhetki) ovat kaikki nollia.

Esimerkki 4.6.1. 1. kertaluvun differentiaaliyhtälössä

$$y'(t) + ay(t) = f(t),$$

$f(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Alkuehdon $y(0) = 0$ nojalla

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s+a},$$

katso kaava (4.6), ts. $G(s) = \frac{1}{s+a}$ on tämän systeemin siirtofunktio. Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa siirtofunktion $G(s) = \frac{1}{s+a}$ avulla muodossa (vrt. kaava (4.6))

$$Y(s) = y(0)G(s) + G(s)F(s).$$

Esimerkki 4.6.2. 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

missä $f(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$ saadaan

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b},$$

joten systeemin siirtofunktio on

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}.$$

Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa nyt muodossa (vrt. kaava (4.7))

$$Y(s) = (y(0)(s + a) + y'(0))G(s) + G(s)F(s).$$

Luku 5: VEKTORI- JA SISÄTULOAVARUUDET

Vektoriavaruus on (epätyhjä) joukko V , jonka alkioihin liitetään kaksi laskutoimistusta: *yhteenlasku* ja *skalaarikertolasku*. Vektoriavaruuden alkioita kutsutaan yleensä vektoreiksi. Yhteenlasku liittyy kahteen V :n alkioon $x, y \in V$ kolmannen alkion, jota merkitään $x + y \in V$. Siis yhteenlasku on kuvaus $V \times V \rightarrow V$.

Yhteenlaskulta vaaditaan seuraavat ominaisuudet:

- (1) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$ (vaihdannaisuus)
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in V$ (liitännäisyys)
- (3) nolla-alkion olemassaolo:

$$\exists 0 \in V \quad \text{s.e.} \quad x + 0 = x, \quad \forall x \in V$$

- (4) vasta-alkion olemassaolo:

$$\forall x \in V \quad \exists y \in V \quad \text{s.e.} \quad x + y = 0$$

Vasta-alkiota y merkitään symbolilla $-x$.

Vektoriavaruus voi olla reaali- tai kompleksikertoiminen riippuen siitä määritelläänkö skalaarilla kertominen reaali- vai kompleksilukujen avulla. Kummassakin tapauksessa skalaarikertolaskulta, joka tarkemmin ilmaistuna on kuvaus $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ tai $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$, vaaditaan seuraavat ominaisuudet (tässä $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$):

- (5) $a(bx) = (ab)x, \quad \forall a, b \in K, \forall x \in V, \quad$ (skalaarikertolaskun liitännäisyys)
- (6) $a(x + y) = ax + ay, \quad \forall a \in K, \forall x, y \in V \quad$ (osittelulait)
- (7) $(a + b)x = ax + bx, \quad \forall a, b \in K, \forall x \in V \quad$ (osittelulait)
- (8) luku $1 \in K$ on skalaarikertolaskun neutraali-alkio:

$$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in V$$

Esimerkki 5.0.3. $\mathbb{R}^n$ on reaalikertoiminen vektoriavaruus:

$$\text{yhteenlasku :} \quad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

$$\text{skalaarikertolasku :} \quad a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Jos tässä $a \in \mathbb{C}$ ja $x_i, y_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n$, saadaan kompleksilukujonojen muodostama vektoriavaruus $\mathbb{C}^n$.

Esimerkki 5.0.4. Funktioavaruuksia.

(a) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, reaalfunktiot $\mathbb{R}$:ssä

$$\text{yhteenlasku : } (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{skalaarikertolasku : } (af)(x) = af(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) $V_p = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ reaalikertoiminen polynomi}\}$ varustettuna kohdan (a) laskutoimituksilla. Nimittäin

$$p, q \text{ polynomeja} \implies p + q \text{ ja } ap \text{ (} a \in \mathbb{R} \text{) polynomeja,}$$

joten $V_p \subset V$ eli V_p on V :n vektoriavaruus.

(c) $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva funktio}\}$ varustettuna kohdan (a) laskutoimituksilla on myös vektoriavaruus. Nytkin kyseiset laskutoimitukset ovat hyvinmääritettyjä joukossa $C([a, b])$, sillä

$$f, g \text{ jatkuva} \implies f + g \text{ ja } af \text{ (} a \in \mathbb{R} \text{) jatkuva.}$$

Esimerkkien (a)-(c) vektoriavaruudet ovat ääretönulotteisia.

Alkiota $x_1, \dots, x_n \in V$ sanotaan *lineaarisesti riippumattomiksi*, jos niiden lineaarikombinaatioille pätee

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa lineaarisesti riippumattomia alkioita löytyy äärettömän monta.

5.1 Sisätuloavaruus

Vektoriavaruuteen voidaan liittää geometriset ominaisuudet sisätulon avulla. Reaalikertoimisen vektoriavaruuden tapauksessa *sisätulo* määritellään kuvauksena $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \times y \mapsto (x, y)$ ($x, y \in V$), jolta vaaditaan seuraavat ominaisuudet: $\forall x, y, z \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$

$$(1) \quad (x, y) = (y, x) \quad (\text{vaihdannaisuus})$$

$$(2) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad (\text{lineaarisuus})$$

$$(3) \quad (ax, y) = a(x, y) \quad (\text{skalaarin siirtosääntö})$$

$$(4) \quad (x, x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad (x, x) = 0 \iff x = 0 \quad (\text{positiivisuus})$$

Jos kyseessä on kompleksikertoiminen vektoriavaruus, niin

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \times y \mapsto (x, y), \quad \forall x, y \in V$$

ja ehto (1) korvataan ehdolla

$$(1') \quad (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad (\text{eli } (y, x)\text{:n kompleksikonjugaatti})$$

Kohdan (2) lineaarisuusominaisuus toisen muuttujan suhteen saadaan seuraavasti:

$$(2') \quad (x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z).$$

Edelleen skalaarin siirtosääntö jälkimmäisen komponentin suhteen saa muodon

$$(3') \quad (x, ay) = \overline{(ay, x)} = \overline{a(y, x)} = \overline{a}(x, y), \quad x, y \in V \text{ ja } a \in \mathbb{C}$$

Esimerkki 5.1.1.

(a) $\mathbb{R}^n$:ssä sisätulon voi määritellä *skalaari- eli pistetulon* avulla:

$$(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

tässä $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, y_n)$.

(b) $\mathbb{C}^n$:ssä sisätulon voi määritellä vastaavasti kaavalla

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

Tällöin nimittäin $\forall x \in \mathbb{C}^n$:

$$(x, x) = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \dots + x_n \overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0,$$

tässä $|x_i| = \sqrt{x_i \overline{x_i}}$ on $x_i : n, 1 \leq i \leq n$, moduli.

Esimerkki 5.1.2. Funktioavaruudessa $C([a, b])$ sisätulon voi määritellä kaavalla

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([a, b]).$$

Ominaisuus (1) seuraa yhtälöstä $f(t)g(t) = g(t)f(t)$. Ominaisuudet (2) ja (3) seuraavat integraalin $\int_a^b$ lineaarisuudesta. Ehto (4):

$$(f, f) = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$$

ja lisäksi

$$0 = \int_a^b f(t)^2 dt \iff f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

koska f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$.

Sisätulon avulla V :n alkioihin voidaan liittää *normi*:

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}, \quad \forall x \in V \quad (\text{vektorin pituus})$$

Sisätulo toteuttaa tärkeän ns. Cauchy-Schwarzin epäyhtälön:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in V \quad (\text{todistus sivuutetaan})$$

Normille saadaan sisätulosta seuraavat *ominaisuudet*:

- (1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$ ja $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, a \in \mathbb{R} \text{ tai } a \in \mathbb{C}$;
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ (kolmioepäyhtälö).

Todistus. Kohdan (3) perustelu:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.1.3.

$$(a) \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälö $C([a, b])$:ssä.

$$(b) \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 |f(t)| \cdot 1 dt \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tätä kutsutaan *Jensenin epäyhtälöksi*. Esim.

$$\left(\int_0^1 t dt \right)^2 = \frac{1}{4} < \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Normi liittää V :n alkioihin niiden pituuden. Erotuksen $x - y$ normi $\|x - y\|$ puolestaan ilmoittaa pisteiden $x, y \in V$ välisen etäisyyden toisistaan. Sisätulon avulla voimme määritellä myös x :n ja y :n välisen kulman $\angle(x, y)$ kaavalla

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad 0 \leq \angle(x, y) \leq \pi,$$

kun V on reaalikertoiminen. Huom. $\frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$ Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla. Siten x ja y ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan, merk. $x \perp y$, jos ja vain jos $(x, y) = 0$. Sovimme, myös, että $0 \perp x \quad \forall x \in V$.

Vektorin x *kohtisuora eli ortogonaalinen projektio* y :lle saadaan kaavalla

$$(5.1) \quad P_y x = \frac{(x, y)}{\|y\|^2} y = \left(x, \frac{y}{\|y\|} \right) \frac{y}{\|y\|}.$$

Erityisesti, jos $\|y\| = 1$, niin $P_y x = (x, y)y$. Jos vektorit $y_1, y_2, \dots, y_n$ ovat kaikki keskenään kohtisuorassa toisiaan vastaan, ts. $(y_i, y_j) = 0$, kun $i \neq j$, ja $x = \sum_{i=1}^n a_i y_i$, niin välttämättä

$$a_i = \frac{(x, y_i)}{\|y_i\|^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nimittäin

$$(x, y_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i, y_j \right) = \sum_{i=1}^n (a_i y_i, y_j) = a_j (y_j, y_j) = a_j \|y_j\|^2.$$

Siis, jos $(y_i, y_j) = 0$, kun $i \neq j$, niin voimme kirjoittaa $x = \sum_{i=1}^n P_{y_i} x$.

Usein ortogonaaliset vektorit vielä normeerataan yksikkövektoreiksi: $e_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$, $1 \leq i \leq n$, jolloin saadaan ortonormaali jono $e_1, e_2, \dots, e_n$: $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, ja $(e_i, e_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Tällöin niiden lineaarikombinaatiot voidaan esittää muodossa

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n P_{e_i} x.$$

(Tässä esiintyvää lukua (x, e_i) kutsutaan toisinaan myös x :n Fourier-kertoimeksi e_i -kantavektorin suhteen.)

Lause 5.1.4. Vektoriavaruuden sisätulolla on seuraavat ominaisuudet:

(1) Pythagoran ominaisuus: Jos $y_1, \dots, y_n$ ovat ortogonaaliset, niin

$$\|y_1 + \dots + y_n\|^2 = \|y_1\|^2 + \dots + \|y_n\|^2;$$

(2) Suunnikassääntö:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2;$$

(3) Polaariyhtälöt:

(a) Kun vektoriavaruus on reaalikertoiminen, pätee

$$(x, y) = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right);$$

(b) Kun vektoriavaruus on kompleksikertoiminen, pätee

$$(x, y) = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \right);$$

Kaikki kaavat todetaan oikeiksi suoralla laskulla. Kohdasta (1) seuraa, että ortogonaaliset vektorit ovat aina lineaarisesti toisistaan riippumattomia. Nimittäin

$$\begin{aligned} a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n &= 0 \\ \implies 0 &= \|a_1 y_1 + \dots + a_n y_n\|^2 = |a_1|^2 \|y_1\|^2 + \dots + |a_n|^2 \|y_n\|^2 \\ \implies a_1 &= \dots = a_n = 0, \end{aligned}$$

sillä $\|y_i\|^2 > 0$, $1 \leq i \leq n$.

Olkoon $e_1, \dots, e_n \in V$ ortonormaali jono ja olkoon E_n ko. vektoreiden virittämä n -ulotteinen V :n aliavaruus:

$$E_n = \text{span} \{e_1, \dots, e_n\} := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i : a_i \in K, 1 \leq i \leq n \right\},$$

tässä $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$. Olkoon $x \in V$ mielivaltainen V :n vektori. Pyritään löytämään $y \in E_n$ siten, että etäisyys $\|x - y\|$ minimoituu.

Lause 5.1.5. Olkoon $x \in V$, tällöin

$$\|x - P_{E_n} x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in E_n,$$

missä

$$P_{E_n} x := \sum_{i=1}^n P_{e_i} x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i.$$

Yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos $y = P_{E_n} x$ on x :n kohtisuora projektio E_n :lle.

Todistus. Olkoon $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in E_n$. Tällöin

$$\begin{aligned} (x - u) \perp E_n &\iff 0 = (x - u, e_j) = \left(x - \sum_{i=1}^n a_i e_i, e_j\right) = (x, e_j) - a_j, \quad 1 \leq j \leq n \\ &\iff u = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i = P_{E_n} x. \end{aligned}$$

Nyt $\forall y \in E_n$ pätee $u - y \in E_n$ ja siten $(u - y) \perp (x - u)$. Pythagoran lauseen (Lause 5.1.4) nojalla pätee

$$\|x - y\|^2 = \|(x - u) + (u - y)\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - y\|^2 \geq \|x - u\|^2.$$

Niinpä

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - u\|^2 = \|x - P_{E_n} x\|^2, \quad \forall y \in E_n$$

ja tässä yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $\|u - y\| = 0 \iff y = u = P_{E_n} x$. $\square$

Jokainen $x \in V$ voidaan projektion P_{E_n} avulla jakaa kahteen osaan, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan:

$$x = \underbrace{(x - P_{E_n} x)}_{\in E_n^\perp} + \underbrace{P_{E_n} x}_{\in E_n}, \quad (x - P_{E_n} x) \perp P_{E_n} x.$$

$E_n^\perp$ on E_n :n kohtisuora komplementti, kirj. $V = E_n^\perp \oplus E_n$. Itse asiassa P_{E_n} on lineaarinen kuvaus V :ssä: $P_{E_n}(ax + by) = aP_{E_n}x + bP_{E_n}y \quad \forall x, y \in V$ ja $\forall a, b \in K$. Sillä on seuraavat kaksi karakterisoivaa ominaisuutta:

$$\begin{aligned} P_{E_n}^2 &= P_{E_n} & (P_{E_n} \text{ on projektio}) \\ P_{E_n} &= P_{E_n}^* & (P_{E_n} \text{ kohtisuoruusominaisuus}). \end{aligned}$$

Tässä $P_{E_n}^*$ on P_{E_n} :n konjugaatti transpoosi:

$$(P_{E_n}^* x, y) = (x, P_{E_n} y), \quad \forall x, y \in V.$$

Seuraus 5.1.6. (Besselin epäyhtälö) Kaikille $x \in V$ pätee epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2,$$

missä $e_1, \dots, e_n$ on ortonormaali jono V :ssa.

Todistus. Koska $(I - P_{E_n})x \perp P_{E_n}x$, Lause 5.1.4 antaa

$$\|x\|^2 = \|x - P_{E_n}x\|^2 + \|P_{E_n}x\|^2 \geq \|P_{E_n}x\|^2.$$

Toisaalta $e_i \perp e_j$, $i \neq j$, ja $\|e_i\| = 1$, $1 \leq i \leq n$, joten edelleen

$$\begin{aligned} \|P_{E_n}x\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i, \sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i \right) = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \cdot \|e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2. \end{aligned}$$

□

Seuraus 5.1.7. (Parsevalin yhtälö) Jos x ja y ovat E_n :n alkioita, niin

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n (x, e_i) \overline{(y, e_i)}.$$

Erityisesti

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2, \quad x \in E_n.$$

Todistus. Kirj. $x = \sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i$, $y = \sum_{j=1}^n (y, e_j)e_j$. Tällöin

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i, \sum_{j=1}^n (y, e_j)e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x, e_i) \overline{(y, e_j)} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n (x, e_i) \overline{(y, e_i)}.$$

□

Mikä tahansa V :n alkioiden muodostama jono lineaarisesti riippumattomia alkioita voidaan ns. Gram-Schmidtin ortogonalisoinnismenetelmällä muuntaa ortonormaaliksi jonoksi.

Lause 5.1.8. (Gram-Schmidtin ortogonalisointi) Olkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$ jono lineaarisesti riippumattomia V :n alkioita. Tällöin jono

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_2 = \frac{x_2 - (x_2, e_1)e_1}{\|x_2 - (x_2, e_1)e_1\|}, \dots, e_n = \frac{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x, e_i)e_i}{\|x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x, e_i)e_i\|}, \dots jne \dots$$

on ortonormaali. Lisäksi $E_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Geometrisesti ilmeinen. Voimme kirjoittaa: $e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, $u_n = x_n - P_{(n-1)}x_n$, missä $P_{(n-1)}$ on ortogonaali projektio E_{n-1} :lle. $\square$

Esimerkki 5.1.9. $x_1 = (1, -1, 1, -1)$, $x_2 = (5, 1, 1, 1)$ ja $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$, sillä

$$u_1 = x_1;$$

$$u_2 = x_2 - P_{(1)}x_2 = x_2 - \frac{(x_2, u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 = (5, 1, 1, 1) - \frac{4}{4}(1, -1, 1, -1) = (4, 2, 0, 2);$$

$$\begin{aligned} u_3 &= x_3 - P_{(2)}x_3 = x_3 - \frac{(x_3, u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{(x_3, u_2)}{\|u_2\|^2}u_2 \\ &= (-3, -3, 1, -3) - \frac{4}{4}(1, -1, 1, -1) - \frac{-24}{24}(4, 2, 0, 2) = (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Koska $u_3 = (0, 0, 0, 0)$ vektorit x_1, x_2, x_3 ovat lineaarisesti riippuvia. Toisaalta $u_2 \neq \bar{0}$, joten x_1 ja x_2 ovat lineaarisesti riippumattomia ja saamme $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ ja $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1)$.

Esimerkki 5.1.10. Varustetaan vektoriavaruus $V = \{p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, p \text{ on polynomi}\}$ sisätulolla

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in V.$$

Polynomit $p_n = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ muodostavat V :n lineaarisesti riippumattoman jonon; itse asiassa jopa virittivät V :n (ts. muodostavat V :n kannan). Gram-Schmidtin ortogonalisointi antaa:

$$u_0(t) = p_0(t) = 1.$$

Koska

$$(p_1, u_0) = \int_{-1}^1 t \cdot 1 dt = 0 \quad \text{ja} \quad \|u_0\|^2 = \int_{-1}^1 1 dt = 2,$$

saadaan kuten edellä kaavan (5.1) mukaan

$$u_1(t) = p_1(t) - \frac{(p_1, u_0)}{\|u_0\|^2}u_0(t) = p_1(t) - \frac{0}{2}u_0(t) = t.$$

Edelleen

$$(p_2, u_0) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad (p_2, u_1) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot t dt = 0, \quad \text{ja} \quad \|u_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

joten

$$u_2(t) = p_2(t) - \frac{(p_2, u_0)}{\|u_0\|^2}u_0 - \frac{(p_2, u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Vastaavasti: $u_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t$, $u_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}$ ja $u_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t$. Yleisesti: $u_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$.

Normalisoimalla pituudet saadaan: $e_0(t) = \frac{u_0}{\|u_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_1(t) = \frac{u_1(t)}{\|u_1(t)\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$, $e_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1)$, jne. $\dots$ (ns. *normalisoidut Legendre polynomit*).

Luku 6: FOURIER-SARJAT

Taylorin sarjojen yhteydessä funktioita pyritään kehittämään potenssisarjoiksi. Kompleksialueessa tämä onnistuu analyyttisten funktioiden tapauksessa, reaalfunktioille välttämätön (mutta ei riittävä) ehto on, että funktiolla on kaikkien kertalukujen derivaatat. *Fourier-sarjojen* tapauksessa näitä säännöllisyysvaatimuksia voidaan huomattavasti lieventää. Tällöin funktio pyritään esittämään ns. *trigonometrisen sarjan*, jonka termit koostuvat sini- ja kosinifunktioista *summana*. Ne ovat muotoa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Koska $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ ovat 2π -jaksollisia, on ilmeistä, että jos yo. trigonometrinen sarja suppenee kohti funktiota $f(x)$, niin f on 2π -jaksollinen. Nyt voimmekin kysyä milloin annettu funktio $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan esittää yo. sarjan summana ja miten kertoimet $a_0, a_1, a_2, \dots$ sekä $b_1, b_2, b_3, \dots$ pitää valita?

6.1 Fourier-kertoimet

Tarkastellaan trigonometrisen sarjan luonnetta geometrisesta näkökulmasta. Funktiot $\cos(nx)$ ja $\sin(nx)$ ovat jatkuvia ja siten integroituvia välillä $[-\pi, \pi]$. Kaavoista

$$\begin{aligned}\cos(mx) \cos(nx) &= \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]; \\ \sin(mx) \sin(nx) &= \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]; \\ \cos(mx) \sin(nx) &= \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) - \sin((m-n)x)],\end{aligned}$$

$m, n \in \mathbb{N}$, seuraa 2π -jaksollisuudesta johtuen, että $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

ja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0.$$

Näin ollen funktiot $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$, $\tilde{e}_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$, $n = 1, 2, \dots$ muodostavat ortonormaalin jonon vektoriavaruuteen $C([-\pi, \pi])$ sisätulon

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([-\pi, \pi])$$

suhteen. Trigonometriseen sarjaan liittyvää osasummaa

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

sanotaan astetta N olevaksi *trigonometriseksi polynomiksi*. Jos $f : [-\pi, \pi]$ on jatkuva, jolloin $f \in C([-\pi, \pi])$, niin Lauseen 5.1.5 nojalla lauseke

$$\|f - S_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx$$

saavuttaa minimin (kiinteällä N :n arvolla), kun

$$(6.1) \quad S_N = \sum_{i=0}^{2N} (f, e_n) e_n = P_{E_N} f.$$

Tämä tarkoittaa, että

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

ja

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Kun nämä kertoimet on laskettu ne määräävät sarjan $\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Jos tämä sarja suppenee (pisteittäin) kohti funktiota f , niin kohdan (6.1) merkintöjä käyttämällä saadaan

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{E_N} f(x).$$

Seuraavan lauseen tulos on nyt ilmeinen.

Lause 6.1.1. Jos $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ ja f on (paloittain) jatkuva välillä $[-\pi, \pi]$, niin $\forall n \in \mathbb{N}$ pätee

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Lauseen 6.1.1 lukuja a_n ja b_n , $n \in \mathbb{N}$, sanotaan funktion f trigonometrisiksi *Fourier-kertoimiksi* ja niiden määräämää sarjaa funktion f trigonometriseksi *Fourier-sarjaksi*. Jos f on välillä $[-\pi, \pi]$ integroituva, ts.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty,$$

myös tulofunktiot $f(x) \cos(nx)$ ja $f(x) \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, ovat integroituvia välillä $[-\pi, \pi]$ ja

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \cdot |\cos(nx)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

Siten Fourier-kertoimet ja Fourier-sarja voidaan muodostaa, kun f on integroituva (ei välttämättä jatkuva) välillä $[-\pi, \pi]$. On huomattava, että Fourier-sarja ei aina kuitenkaan välttämättä suppene (edes jatkuvan funktion tapauksessa), ja vaikka se suppenisi, ei sen summa välttämättä yhdy alkuperäiseen funktioon $f(x)$.

Esimerkki 6.1.2. Olkoon $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Huomaa, että f on epäjatkuva pisteessä $x = 0$. Muodostetaan f :n Fourier-sarja. Fourier-kertoimet ovat:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} 2dx \right] = \frac{1}{\pi} [-\pi + 2\pi] = 1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 + 2 \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \sin(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 - 2 \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi) - 2 \cos(n\pi) + 2] = \frac{3}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n \text{ parillinen;} \\ \frac{6}{n\pi}, & n \text{ pariton.} \end{cases} \end{aligned}$$

Siis f :n Fourier-sarja on

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right).$$

Selvästi $S_f(0) = \frac{1}{2}$, joten $S_f(0) \neq f(0) = 2$. Fourier-sarja ei suppene kohti f :ää pisteessä $x = 0$. (Sen sijaan pisteissä $x \neq 0$, $-\pi < x < \pi$, pätee $S_f(x) = f(x)$.)

Havaitaan myös, että f :n epäjatkuvuuskohdassa $S_f(0) = \frac{-1+2}{2}$, ts.

$$S_f(0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right).$$

Seuraavat tulokset saattavat usein helpottaa Fourier-kertoimien laskemista.

Lause 6.1.3. Jos f on $2a$ -jaksollinen jatkuva funktio, niin

$$(6.2) \quad \int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a+r}^{a+r} f(t) dt, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Todistus.

$$(6.3) \quad \int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^{-a+r} f(t) dt + \int_{-a+r}^{a+r} f(t) dt + \int_{a+r}^a f(t) dt$$

Jaksollisuudesta johtuen voimme kirjoittaa

$$\int_{-a}^{-a+r} f(t) dt = \int_{-a}^{-a+r} f(t+2a) dt = \int_a^{a+r} f(u) dt = - \int_{a+r}^a f(u) du,$$

missä toinen yhtälö saadaan sijoituksella $u = t + 2a$ (jolloin $du = dt$, $t = -a \Leftrightarrow u = a$, $t = -a + r \Leftrightarrow u = a + r$). Huomioimalla edellinen yhtälö lausekkeessa (6.3) saadaan kaava (6.2). $\square$

Niinpä, kun jaksollinen funktio integroidaan yli jaksovälinsä, integroinnin aloituskohdan voi valita vapaasti.

Esimerkki 6.1.4. Jos f on 2π -jaksollinen funktio, niin

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Lause 6.1.5. Jos $f(x)$ on integroitava funktio, niin $\forall c \in \mathbb{R}$ pätee:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + c) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + c) \sin(nx) dx, \end{aligned}$$

arvoilla $n = 1, 2, 3, \dots$

Todistus.

$$\int_{-\pi}^{\pi} c \cos(nx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} c \sin(nx) dx, \quad c \in \mathbb{R}, 0 < n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Tulos osoittaa, että jos funktioon f lisätään vakio c , niin sen Fourier-sarjassa ainoastaan kerroin $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ muuttuu arvoon $a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c dx = a_0 + 2c$, jolloin

$$\frac{a_0}{2} \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + c.$$

Jos funktio $f(x)$ kerrotaan kiinteällä vakiolla a , niin funktion $af(x)$ Fourier-kertoimet saadaan kertomalla vastaavat $f(x)$:n Fourier-kertoimet vakiolla a , sillä esim.

$$(6.4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} (af(x)) \sin(nx) dx = a \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Parillisille ja parittomille funktioille on voimassa seuraava yleinen tulos, joka yhdistettynä edellisiin havaintoihin, helpottaa usein Fourier-kertoimien laskemista.

Lause 6.1.6. Jos f on parillinen funktio, niin $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ja jos f on pariton funktio, niin $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Jos f on parillinen, niin tulofunktio $f(x) \sin(nx)$ on pariton. Tästä seuraa, että $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$. Vastaavasti, jos f on pariton, tulofunktio $f(x) \cos(nx)$ on pariton, mistä seuraa, että $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$. $\square$

Esimerkki 6.1.7. (Vrt. esim. 6.1.2) 2π -jaksollinen suorakaideaalto on muotoa

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0; \\ k, & 0 < x < \pi; \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi k) = f(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sen Fourier-kertoimet saadaan Lauseiden 6.1.5 ja 6.1.6 sekä Esimerkin 6.1.2 avulla suoraan huomioimalla lisäksi kaava (6.4):

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (f \text{ pariton})$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ parillinen} \\ \frac{2k}{3} \frac{6}{n\pi} = \frac{4k}{n\pi}, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

f :n Fourier-sarja on siis muotoa

$$S_f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

Funktion f Fourier-sarjaan liittyviä ensimmäisiä osasummia on esitetty Kuvissa 6.1. Kuviot viittavat siihen, että kyseinen Fourier-sarja suppenee ja että sen summa yhtyy alkuperäiseen funktioon f pisteissä x , joissa $f(x)$ on jatkuva. Funktio $f(x)$ on epäjatkuva pisteissä $x = 0$ ja $x = \pm\pi$ sekä yleisemmin pisteissä $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funktion f epäjatkuvuuskohdissa pätee $\sin(k\pi) = 0$ ja tämän seurauksena Fourier-sarjan summana on myös arvo nolla. Havaitaan, että kyseinen arvo nolla on toisaalta alkuperäisen funktion f toispuoleisten raja-arvojen aritmeettinen keskiarvo pisteissä $x = k\pi$.

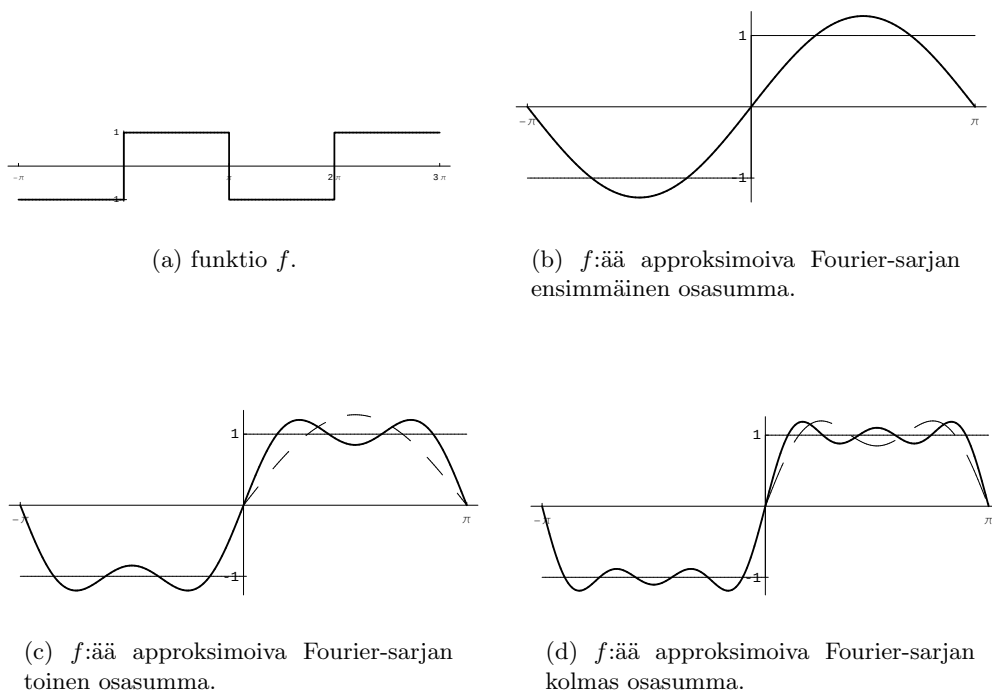
Pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$ funktio f on jatkuva, ja jos vastaavan Fourier-sarjan summa yhtyy arvoon $f(\frac{\pi}{2})$, niin

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right),$$

ja siten

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Tämä osoittaa, että Fourier-sarjan avulla voi kätevästi laskea hankalien reaalityökalujen summaa. Ko. sarjan summan laski ensimmäisenä Leibniz (v. 1673) geometrisin keinoin.



Kuva 6.1: f ja sitä approksimoivat kolme ensimmäistä Fourier-sarjan osasummaa.

6.2 Fourier-sarjan suppeneminen

Jos f on integroitava funktio välillä $[-\pi, \pi]$, niin sille voidaan muodostaa vastaava Fourier-sarja:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =: S_f(x),$$

missä a_n ja b_n ovat f :n Fourier-kertoimet (Lause 6.1.1), osoittautuu, että ko. sarja suppenee kohti alkuperäistä funktioita melko vähäisillä oletuksilla funktiosta f . Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on *paloittain jatkuva*, jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä, joissa sillä on olemassa *äärelliset toispuoleiset raja-arvot*. Edelleen funktiota f sanotaan *paloittain jatkuvasti derivoituvaksi välillä $[a, b]$* , jos f on välillä $[a, b]$ *paloittain jatkuva ja derivoituva* lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä, ja jos lisäksi sen derivaatta f' on *paloittain jatkuva välillä $[a, b]$* .

Lause 6.2.1. Olkoon f 2π -jaksollinen funktio, joka on välillä $[-\pi, \pi]$ paloittain jatkuvasti derivoituva. Tällöin f :n Fourier-sarja $S_f(x)$ suppenee pisteessä $x \in \mathbb{R}$ kohti f :n vasemman- ja oikeanpuoleisen raja-arvon keskiarvoa:

$$S_f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

Erityisesti, jos f on jatkuva pisteessä x , niin $S_f(x) = f(x)$.

Todistus. Esitämme todistuksen vain tapauksessa, jossa f on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. Osittaisintegrointi antaa

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \underbrace{\frac{f(x) \sin(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx.$$

Suoritetaan osittaisintegrointi toisen kerran, jolloin saadaan

$$a_n = \underbrace{\frac{f'(x) \cos(nx)}{n^2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx = -\frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx.$$

Huomaa, että oletuksen mukaan f on 2π -jaksollinen funktio, jolloin myös sen derivaatta f' on 2π -jaksollinen funktio. Tällöin erityisesti $f'(-\pi) = f'(\pi)$, mikä selittää sen, että edellisen lausekkeen ensimmäisessä termissä tehtävä sijoitus todella antaa arvoksi luvun nolla.

Koska f'' on jatkuvana suljetulla välillä rajoitettu eli $|f''(x)| \leq M < \infty$, $x \in [-\pi, \pi]$, saadaan arvio

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x) \cos(nx)| dx \leq \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{2M}{n^2},$$

$n = 1, 2, \dots$. Vastaavasti nähdään, että $|b_n| \leq \frac{2M}{n^2}$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$. Majoranttiperiaatteen nojalla f :n Fourier-sarja suppenee, sillä sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana. Lisäksi sarjan summa $S_f(x)$ on tässä tapauksessa jatkuva funktio (yo. ns. Weierstrassin majoranttiehto $\implies$ suppeneminen on tasaista välillä $[-\pi, \pi]$). Selvästi $S_f(x)$:n Fourier-kertoimet ovat $a_n, b_n \forall n \in \mathbb{N}$:

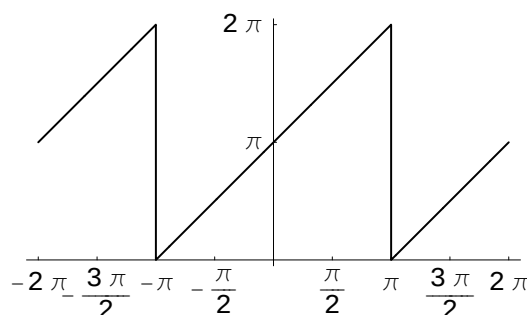
$$a_n(S_f) = a_n(f) \quad \text{ja} \quad b_n(S_f) = b_n(f).$$

Näin ollen $(f - S_f) \perp \cos(nx), \sin(nx) \forall n \in \mathbb{N}$ avaruuden $C([- \pi, \pi])$ sisätulon suhteen $\iff (f - S_f) \perp C([- \pi, \pi])$, joten välttämättä $f - S_f \equiv 0$ ($C([- \pi, \pi])$:n nollavektori). $\square$

Esimerkki 6.2.2. 2π -jaksollinen suorakaideaalto on epäjatkuva pisteissä $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Sen Fourier-sarja suppenee kohti alkuperäistä funktioita lukuunottamatta pisteitä $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, joissa pätee $S_f(k\pi) = 0$ (Kts. Kuva 6.1).

Esimerkki 6.2.3. (sahahammasaalto) Olkoon f 2π -jaksollinen funktio, jonka määrittelee ehdot

$$f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi \quad \text{ja} \quad f(x + 2\pi k) = f(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kuva 6.2: funktio $f(x)$.

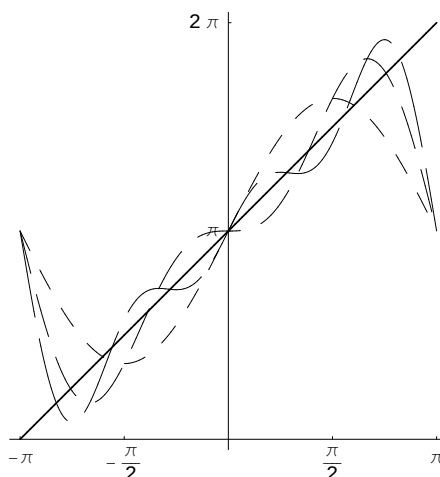
Välillä $[-\pi, \pi]$ funktio $y = x$ on pariton (ja siten myös sen 2π -jaksollinen jatke $f(x) - \pi, \forall x \in \mathbb{R}$). Nyt Lauseet 6.1.5 ja 6.1.6 antavat: $\frac{a_0}{2} = \pi$ ja $a_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx}_{=0} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{(-\pi) \cos(n\pi)}{n} \right] = -\frac{2(-1)^n}{n}.$$

$$S_f(x) = \pi + 2(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots) = f(x),$$

kun $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ja $S_f(k\pi) = \pi$.

Kuva 6.3: funktio $f(x)$ ja sen kolme ensimmäistä Fourier-approksimaatiota; vrt. [1].

Yllä esitetyt tulokset voidaan helposti siirtää 2π -jaksollisesta tapauksesta funktioille, jotka ovat $a = 2L$ -jaksollisia. Tällöin esim. funktioon $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$

liittyvä Fourier-sarja ja sen Fourier-kertoimet saadaan kaavoilla

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Myös Lauseiden 6.1.5, 6.1.6 ja 6.2.1 tulokset ovat ilmeisin muutoksin voimassa $2L$ -jaksollisille funktioille.

6.3 Kompleksiset Fourier-sarjat

Fourier-sarja esitetään usein kompleksisessa muodossa. Ideana on käyttää eksponenttifunktiota e^z , joka on määritelty koko kompleksitasossa kaavalla

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Tällöin

$$\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Voimme nyt kirjoittaa

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}.$$

Merk. $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ja $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, jolloin $\overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$. Tällöin

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

$$\overline{c_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) + i \sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Sallimalla n :lle myös negatiiviset arvot havaitsemme, että

$$\overline{c_n} = c_{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sijoittamalla nämä f :n Fourier-sarjaan saamme esityksen

$$f(x) \sim S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Sarjaa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ sanotaan f :n kompleksiseksi Fourier-sarjaksi ja sen kertoimia $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ f :n kompleksisiksi Fourier-kertoimiksi. $2L$ -jaksolliselle funktiolle vastaavat kaavat ovat

$$f(x) \sim S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx.$$

Kantafunktioihin e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$, liittyy samat geometriset tulkinnat kuin edellä funktioihin $\cos(nx)$ ja $\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Tällöin vektoriavaruuteen

$$C([- \pi, \pi]) = \{f : [- \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ jatkuva}\},$$

jossa sallitaan myös kompleksilukuarvoiset funktiot, voidaan liittää sisätulo

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Nyt

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Ko. funktiot muodostavat ortonormaalin kannan $C([- \pi, \pi])$:hin,

$$C([- \pi, \pi]) = \overline{\text{span}}\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Kun f :n Fourier-sarja suppenee kohti f :ää, saamme seuraavan tuloksen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

Seuraus 6.3.1. (Parsevalin yhtälö)

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Huomioimalla, että $c_{-n} = \overline{c_n}$ ja että $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, voimme kirjoittaa Parsevalin yhtälön myös muodossa

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Tekniikan sovelluksissa lukua (f :n neliöllinen keskiarvo yli jaksovälin)

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

sanotaan usein 2π -jaksollisen signaalin (funktion) f keskimääräiseksi tehoksi. Parsevalin yhtälö osoittaa, että signaalin teho jakautuu komponenttifunktioiden $c_n e^{inx}$ tehojen summaksi, nimittäin:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_n e^{inx} \overline{c_n} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |c_n|^2 dx = |c_n|^2.$$

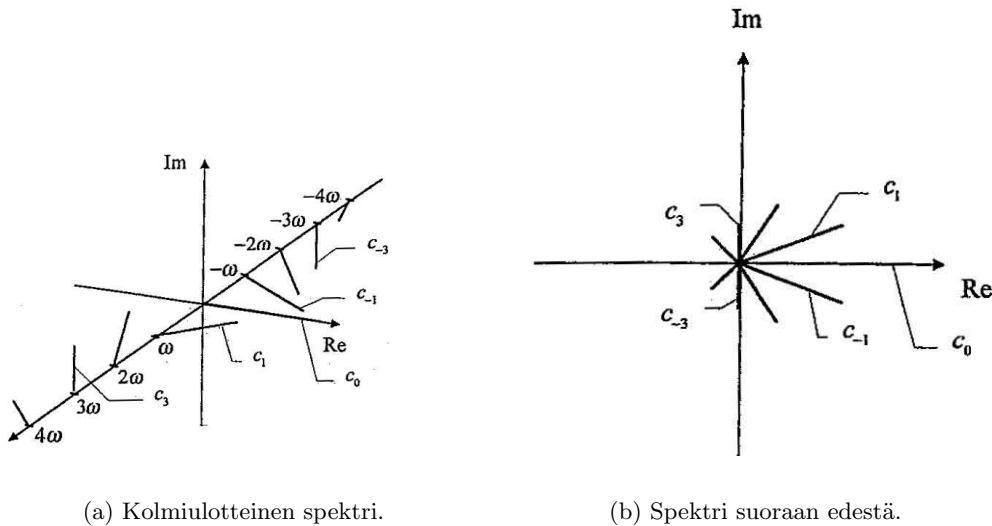
Komponentit $c_n e^{inx}$ vastaavat eri aaltopituuksia ja kerroin c_n kuvaa sitä millä painolla ko. aaltopituus esiintyy signaalissa f . Funktion f Fourier-sarjaan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ liitetään tyypillisesti seuraavat käsitteet.

2π -jaksollisen funktion spektri: pisteparien (n, c_n) joukko, ts.

$$\{(n, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}, \quad (f\text{:n spektri}),$$

missä c_n on f :n kompleksinen Fourier-kerroin. Spektri ilmoittaa *painokertoimet* c_n , joilla vastaavat ns. *harmoniset taajuuskomponentit* e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$, esiintyvät funktion f Fourier-sarjassa.

Spektriä voidaan havainnollistaa 3-ulotteisessa avaruudessa; kts. kuvat 6.4 alla. Spektri on kuvaus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Se kuvaa funktiota f ns. *taajuusalueessa*, kun taas f :n tavanomainen esitys $t \rightarrow f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, kuvaa funktioita f ns. *aika-alueessa*.



Kuva 6.4: spektrin havainnollistuksia

Kompleksisen Fourier-sarjan painokertoimet c_n ovat kompleksilukuja. Luvun c_n modulia $|c_n|$ sanotaan *amplitudiksi* ja sen argumenttia $\arg(c_n)$ *vaiheeksi*. Esittämällä Fourier-kertoimet c_n *napakoordinaatistossa* saadaan f :n spektri jaettua kahteen komponenttiin:

$$\text{amplitudispektriin: } \{(n, |c_n|) : n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\text{vaihespektriin: } \{(n, \arg(c_n)) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

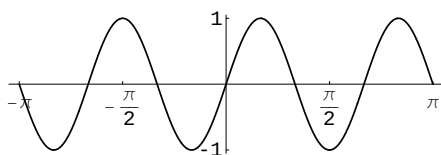
Esimerkki 6.3.2. Määrätään funktion $f(t) = \sin(kt)$ spektri ja sen osat ($k \in \mathbb{N}$ kiinteä). Koska

$$\sin(kt) = \frac{1}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt})$$

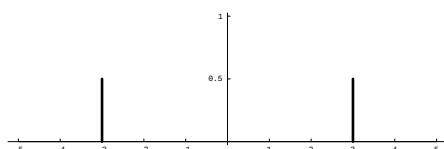
päättelemme, että $\sin(kt)$:n kompleksiset Fourier-kertoimet ovat

$$c_k = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}, \quad c_{-k} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} \quad \text{ja} \quad c_n = 0 \quad \text{muulloin.}$$

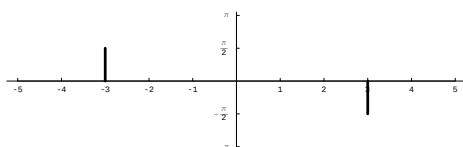
Siten funktion $\sin(kt)$ spektri on $\{(-k, \frac{i}{2}), (k, -\frac{i}{2})\}$, vastaavasti amplitudispektri on $\{(-k, \frac{1}{2}), (k, \frac{1}{2})\}$ ja vaihespektri on $\{(-k, \frac{\pi}{2}), (k, -\frac{\pi}{2})\}$.



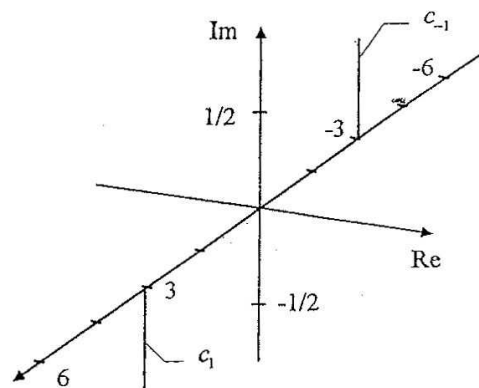
(a) Funktio $f(t) = \sin(3t)$.



(b) Funktion $f(t) = \sin(3t)$ amplitudispektri.



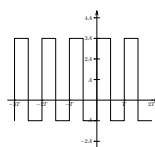
(c) Funktion $f(t) = \sin(3t)$ vaihespektri.



(d) Funktion $f(t) = \sin(3t)$ spektri kolmiulotteisena.

Kuva 6.5: funktio $f = \sin(3t)$, sen spektri ja spektrin kaksi komponenttia.

Esimerkki 6.3.3. Lasketaan Kuvassa 6.6 olevan sakarapulssin spektri.



Kuva 6.6: sakarapulssi; vrt. [2].

Suoraan laskemalla tai käyttämällä apuna Esimerkkiä 6.1.7 toteamme helposti, että

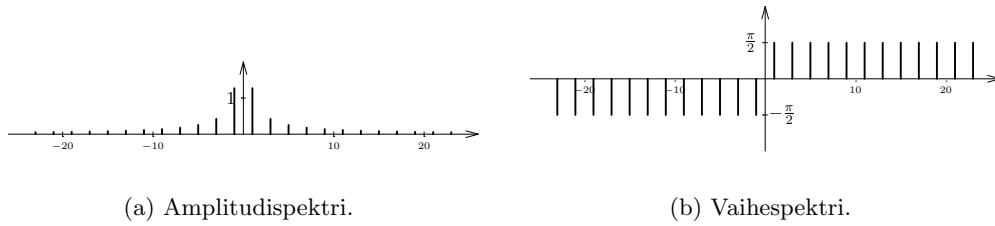
sakarapulssiin liittyvän trigonometrisen Fourier-sarjan kertoimet ovat

$$a_0 = 2A, \quad a_n = 0, \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{4A}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tästä seuraa, että

$$c_0 = A, \quad c_n = -\frac{ib_n}{2} = \frac{2iA}{n\pi}(e^{in\pi} - 1) = \begin{cases} -\frac{4Ai}{n\pi}, & n \text{ pariton,} \\ 0, & n \text{ parillinen.} \end{cases}$$

Kuvissa 6.7 on valittu $A = 1$.



Kuva 6.7: sakarapulssin spektrin kaksi komponenttia; vrt. [2].

Huomattakoon, että amplitudispektrissä joka toisen spektriviivan korkeus on nolla ja vaihespektrissä vaihe on aina joko $-\frac{\pi}{2}$ tai $\frac{\pi}{2}$. Tämä kertoo siitä, että kaikki Fourier-kertoimet ovat puhtaita imaginaarilukuja.

Spektriä tarkasteltaessa on hyvä huomioda seuraava painokertoimia c_n (tai a_n ja b_n) koskeva yleinen tulos.

Seuraus 6.3.4. Fourier-kertoimille c_n on voimassa:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0.$$

Vastaava tulos pätee kertoimille a_n, b_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Todistus. Parsevalin yhtälön (Seuraus 6.3.1) nojalla $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2 < \infty$, joten sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ suppenee. Tällöin välttämättä

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |c_n| = 0$$

ja sitten myös $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$. Jälkimmäinen väite seuraa siitä, että $|c_n|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \rightarrow 0$. $\square$

Jos funktion kompleksisesta Fourier-sarjasta halutaan päästä trigonometriseen (reaaliseen) Fourier-sarjaan, niin kertoimet a_n ja b_n saadaan kertoimista c_n kaavoilla

$$\begin{aligned} a_n &= 2\operatorname{Re} c_n = c_n + \overline{c_n} = c_n + c_{-n}, \quad n \geq 0, \\ b_n &= -2\operatorname{Im} c_n = -\frac{c_n - \overline{c_n}}{i} = i(c_n - \overline{c_n}) = i(c_n - c_{-n}), \quad n > 0. \end{aligned}$$

Palautetaan mieleen, että funktion $2L$ -jaksollinen kompleksinen Fourier-sarja on muotoa

$$(6.5) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}, \quad \text{missä} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx.$$

Tässä esityksessä Fourier-sarja muodostuu taajuuskomponenteista, joissa esiintyvät perustaajuuden $w_0 = \pi/L$ kokonaislukumonikerrat nw_0 , $n \in \mathbb{Z}$. Jaksollisuudesta päästään muodollisesti eroon antamalla L :n kasvaa mielivaltaisen suureksi ($L \rightarrow \infty$), jolloin perustaajuus $w_0 \rightarrow 0$. Tämä johtaa yleiseen Fourier-muunnokseen, jota käsitellään seuraavassa luvussa.

Luku 7: FOURIER-MUUNNOS

Fourier-muunnokset liittyvät läheisesti Fourier-kertoimien ja -sarjojen käsitteeseen. Fourier-muunnosta voi pitää Fourier-sarjaan liittyvän spektrin yleistykseenä tilanteeseen, jossa taajuutena $w = \frac{n\pi}{L}$ voi esiintyä mikä tahansa reaaliluku. Tämä saavutetaan muodollisesti antamalla kaavassa (6.5) $L \rightarrow \infty$. ($2L$ -jaksollisen funktion spektriin liittyvä kuvaus $nw_0 \rightarrow c_n$, missä $w_0 = \frac{\pi}{L}$ ja $n \in \mathbb{Z}$.)

7.1 Fourier-muunnoksen määritelmä ja käänteismuunnos

Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tai yleisemmin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnoksen määrittelee kaava

$$(7.1) \quad F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Fourier-muunnos on hyvin määritelty $\forall w \in \mathbb{R}$, jos f on integroitava yli koko $\mathbb{R}$:n, ts. jos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Tällöin funktion f Fourier-muunnos on kuvaus $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $w \rightarrow F(w)$. Sen arvot ovat siis yleensä kompleksilukuja. Sille käytetään myös merkintää $\hat{f}$:

$$\hat{f}(w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt.$$

Fourier-muunnokseen liittyy läheisesti *käänteismuunnos*:

$$(7.2) \quad F^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Muunnokset F ja F^{-1} ovat toistensa käänteismuunnoksia, joille käytetään myös seuraavia täsmällisempiä merkintöjä:

$$\mathcal{F}(f(t); w) \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}^{-1}(F(w); t).$$

Tällöin $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})(f(t)) = f(t)$ (f ja F integroituvia/jatkuvia), ts.

$$(7.3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iws} ds \right) e^{iwt} dt = f(t).$$

Käänteismuunnos vastaa Fourier-sarjaa, jossa yhteenlaskettavia taajuuskomponentteja e^{iwt} esiintyy kaikilla reaaliluvuilla eli taajuuksilla $w \in \mathbb{R}$; tällöin muodollisesti

" $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sim \int_{-\infty}^{\infty}$ ". Yhdessä $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^{-1}$ muodostavat ns. *Fourier-muunnosparin*. Ne esiintyvät toisinaan myös muodossa

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw,$$

virt. [1]. Huomaa, että $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}$, jolloin kaava (7.3) pysyy voimassa eli yo. kaavat määräävät edelleen toinen toisensa käänteismuunnoksen.

Esimerkki 7.1.1. Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} k, & 0 < t < a; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (a > 0)$$

Lasketaan funktion f Fourier-muunnos:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = \int_0^a k e^{-iwt} dt = -\frac{k e^{-iwt}}{iw} \Big|_0^a = \frac{k(1 - e^{-iaw})}{iw}.$$

Esimerkki osoittaa, että myös reaalilla vakiolla $k \in \mathbb{R}$, f :n Fourier-muunnos on kompleksiarvoinen funktio.

Esimerkki 7.1.2. Olkoon

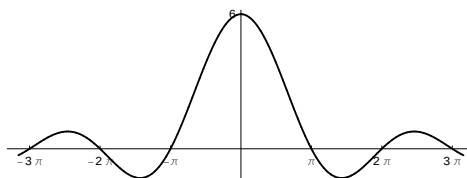
$$f(t) = \begin{cases} k, & -a < t < a; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (a > 0)$$

Nyt f :n Fourier-muunnokseksi saadaan

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = \int_{-a}^a k e^{iwt} dt = -\frac{k e^{-iwt}}{iw} \Big|_{-a}^a = \frac{k(e^{iaw} - e^{-iaw})}{iw} = \frac{2k \sin(aw)}{w}.$$

Nyt f :n Fourier-muunnos on reaaliarvoinen, jos $k \in \mathbb{R}$. Koska $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, nähdään että

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-a}^a k dt = 2ak = \lim_{w \rightarrow 0} F(w).$$



Kuva 7.1: Funktion $F(w) = \frac{2k \sin(aw)}{w}$ kuvaaja arvoilla $a = 1$ ja $k = 3$.

7.2 Laplace- ja Fourier-muunnoksen välinen yhteys

Kun asetamme $f(t) = 0$ arvoilla $t < 0$, saamme esitettyä Laplace-muunnoksen Fourier-muunnoksen avulla:

$$\mathcal{F}(f(t); s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = \mathcal{L}(f(t); is)$$

tai yhtäpitävästi $\mathcal{L}(f(t); s) = \mathcal{F}(f(t); -is)$ ($s \in \mathbb{R}$).

Esimerkki 7.2.1. Olkoon $f(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$ ja $f(t) = 0$, $t < 0$. Tällöin $\mathcal{F}(f(t); w) = \frac{1}{a+iw}$; katso Taulukko A.2. Niinpä

$$\mathcal{L}(f(t); s) = \mathcal{F}(f(t); -is) = \frac{1}{a - i^2 s} = \frac{1}{a + s},$$

kun $s > -a$. Kääntäen lähtemällä kaavasta $\mathcal{L}(f(t); s) = \frac{1}{s+a}$, $s > -a$, saadaan Fourier-muunnoskaava $\mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{L}(f(t); iw) = \frac{1}{a+iw}$.

Laplace- ja Fourier-muunnoksen välisestä yhteydestä seuraa, että Fourier-muunnoksella on samankaltaisia ominaisuuksia kuin Laplace-muunnoksella.

7.3 Fourier-muunnoksen ominaisuuksia

Esitämme eräitä keskeisiä Fourier-muunnoksen ominaisuuksia.

Lause 7.3.1. Olkoot a ja b vakioita. Tällöin:

- (1) (Lineaarisuus) $\mathcal{F}(af(t) + bg(t); w) = a\mathcal{F}(f(t); w) + b\mathcal{F}(g(t); w)$,
- (2) (Skaalaus) $\mathcal{F}(f(at); w) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(t); \frac{w}{a})$, kun $a > 0$
- (3) (Siirto) $\mathcal{F}(f(t - t_0); w) = e^{-iwt_0}\mathcal{F}(f(t); w)$
- (4) (Taajuussiiro) $\mathcal{F}(f(t)e^{iwt_0}; w) = \mathcal{F}(f(t); w - w_0)$

Todistus. (1) Seuraa suoraan integraalin lineaarisuudesta.

(2) Käytetään muuttujanvaihtoa $\lambda = at$, jolloin $d\lambda = a dt$;

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(at); w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-i\frac{w}{a}\lambda} \frac{1}{a} d\lambda = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-i\frac{w}{a}\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{F}(f(\lambda); \frac{w}{a}). \end{aligned}$$

(3) Muuttujanvaihto $\lambda = t - t_0$, jolloin $d\lambda = dt$, antaa

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t - t_0); w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-iw(\lambda + t_0)} d\lambda \\ &= e^{-iwt_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-iw\lambda} d\lambda = e^{-iwt_0} \mathcal{F}(f(\lambda); w). \end{aligned}$$

(4) Tämä jätetään harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 7.3.2. Lasketaan funktion

$$x(t) = \begin{cases} 3, & \frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2}; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Fourier-muunnos Esimerkin 7.1.2 ja Lauseen 7.3.1 avulla: Merkitään

$$y(t) = \begin{cases} 3, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin $y(t) = f(t)$, kun valitaan Esimerkissä 7.1.2 $k = 3$ ja $a = \frac{\pi}{2}$. Esimerkin 7.1.2 nojalla y :n Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}(y(t); w) = \frac{6 \sin(\frac{\pi w}{2})}{w}.$$

Toisaalta $x(t) = y(t - 2\pi)$, jolloin Lauseen 7.3.1 kohtaa (3) soveltamalla saadaan

$$\mathcal{F}(x(t); w) = \mathcal{F}(y(t - 2\pi); w) = e^{-iw2\pi} \mathcal{F}(y(t), w) = e^{-iw2\pi} \frac{6 \sin(\frac{\pi w}{2})}{w}.$$

Esimerkki 7.3.3. (Jatkoa edelliseen esimerkkiin.) Lasketaan esimerkin 7.3.2 Fourier-muunnos vaiheittain, kun lähtökohdaksi valitaan funktion

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < \pi; \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos $\mathcal{F}(x_0(t); w) = \frac{2}{w} \sin(\pi w) = 2\pi \frac{\sin(\pi w)}{\pi w}$. Käytetään apuna Lauseen 7.3.1 kohtia (1), (2) ja (3):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3x_0(t) \implies \mathcal{F}(x_1(t); w) = 3\mathcal{F}(x_0(t); w) = \frac{6 \sin(\pi w)}{w}; \\ x_2(t) &= x_1(2t) \implies \mathcal{F}(x_2(t); w) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(x_1(t); \frac{w}{2}) = \frac{6 \sin(\frac{\pi w}{2})}{w}; \\ x(t) &= x_2(t - 2\pi) \implies \mathcal{F}(x(t); w) = e^{-2i\pi w} \mathcal{F}(x_2(t); w) = e^{-2i\pi w} \frac{6 \sin(\frac{\pi w}{2})}{w}. \end{aligned}$$

Tilanteen havainnollistamiseksi piirrä funktioiden $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ ja $x(t)$ kuvaajat sekä myös niitä vastaavien Fourier-muunnosten kuvaajat vaiheittain.

7.4 Derivaatan Fourier-muunnos

Lause 7.4.1. Olkoon f derivoituva ja $|f|$, $|f'|$ integroituvia yli $\mathbb{R}$:n. Tällöin

$$\mathcal{F}(f'(t); w) = iw \mathcal{F}(f(t); w).$$

Todistus. Olkoon $F(w)$ f :n Fourier-muunnos. Tällöin

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(w); t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dt$$

ja derivoimalla t :n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dt \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \frac{d}{dt} e^{iwt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) i w e^{iwt} dt = \mathcal{F}^{-1}(i w F(w); t). \end{aligned}$$

Siten

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt} f(t); w\right) = i w F(w) = i w \mathcal{F}(f(t); w).$$

□

Soveltamalla Lausetta 7.4.1 toistuvasti saadaan

Seuraus 7.4.2. Jos $f(t)$:llä on kertalukua n oleva derivaatta $f^{(n)}(t)$, joka on integroitava yli $\mathbb{R}$:n, niin pätee

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(t); w) = (i w)^n \mathcal{F}(f(t); w).$$

Esimerkki 7.4.3. Lasketaan funktion $f(t) = t e^{-t^2}$ Fourier-muunnos käyttämällä apuna Taulukon 7.1 kohtaa 5, vrt. liitetaulukot A:

$$\mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right)\right) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt} e^{-t^2}\right) = -\frac{i w}{2} \mathcal{F}(e^{-t^2}; w) = -\frac{i w \sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{w^2}{2}}.$$

	$f(t)$	$\mathcal{F}(f(t); w)$
1	$\begin{cases} 1, & b < t < c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw}$
2	$\begin{cases} 1, & -c < t < c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$	$\frac{2 \sin(cw)}{w}$
3	$\frac{1}{t^2 + a^2} \quad a > 0$	$\frac{\pi e^{-a w }}{a}$
4	$\begin{cases} e^{at}, & b < t < c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{a-iw}$
5	$e^{-at^2} \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
6	$\frac{\sin(at)}{t} \quad a > 0$	$\begin{cases} \pi, & w < a \\ 0, & w > a \end{cases}$

Taulukko 7.1: Eräiden funktioiden Fourier-muunnoksia.

7.5 Konvoluutio

Olkoot f, g koko $\mathbb{R}$:ssä määriteltyjä funktioita. Tällöin *funktioiden f ja g konvoluutio* $f * g$ on funktio, joka määritellään kaavalla

$$(7.4) \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \left(= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s)ds = (g * f)(x) \right).$$

Konvoluutioita käytetään paljon tekniikan sovelluksissa juuri integraalimuunnosten yhteydessä, mutta myös esim. todennäköisyyslaskennassa. Seuraavat konvoluution ominaisuudet saadaan helposti määritelmästä, mm. (1) saadaan yhtälöstä (7.4).

Lause 7.5.1.

- (1) (vaihdannaisuus) $f * g = g * f$
- (2) (liitännäisyys) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (3) (osittelulaki) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Konvoluution Fourier-muunnokselle pätee seuraava tärkeä tulos.

Lause 7.5.2. (Konvoluutioteoreema) Olkoot f ja g jatkuvia ja integroituvia yli $\mathbb{R}$:n. Tällöin

$$\mathcal{F}((f * g)(t); w) = \mathcal{F}(f(u); w)\mathcal{F}(g(v); w).$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(u); w)\mathcal{F}(g(v); w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i w u} du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i w v} dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)e^{-i w (u+v)} du dv =: I \end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto $t = u + v$, jolloin $dt = dv$, ja

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)e^{-i w t} du dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du \right) e^{-i w t} dt \\ &= \mathcal{F}((f * g)(t); w). \end{aligned}$$

□

7.6 Eräiden funktioiden Fourier-muunnoksia

Dirac'in delta(funktion) $\delta(t)$, täsmällisemmin δ -distribuution (lue ”delta-distribuution”) eli δ -jakauman voi ajatella raja-arvona funktioista

$$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 < t < \epsilon; \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

kun $\epsilon \rightarrow 0$. (Muodollisesti tällöin $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$) Deltafunktiolle saadaan ominaisuudesta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t) dt = 1$$

muodollisesti vastaava tulos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Asia voidaan esittää täsmällisemmin pitämällä deltafunktia jakaumana (distributiona), joka saa arvot 0 ja 1, ja jossa $m_0 = 1$ suuruisen ”integrintimassa” sijaitsee pisteessä $t = 0$ eikä integrintimassaa esiinny muualla $\mathbb{R}$:ssä.

Tästä johtuen deltafunktioille on voimassa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0).$$

Seurauksena saamme deltafunktioille seuraavan Fourier-muunnoksen

$$\mathcal{F}(\delta(t); w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-iwt} dt = e^{-iw \cdot 0} = 1, \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Siis $\mathcal{F}(\delta(t); w) \equiv 1$. Deltafunktioille pätee myös mm. seuraavassa lauseessa esitetyt ominaisuudet.

Lause 7.6.1.

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

$$(2) \delta(-t) = \delta(t)$$

$$(3) \int_{-\infty}^x f(t) \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ f(0), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Johdetaan vakiofunktion $f(t) \equiv 1$ Fourier-muunnos. Koska $\mathcal{F}(\delta(t); w) = 1$, saadaan

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}(1; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{iwt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-iw(-t)} dt$$

ja edelleen

$$\mathcal{F}(1; t) = 2\pi \delta(-t) = 2\pi \delta(t).$$

Signumfunktio (eli merkkifunktio) $s(t)$ määritellään kaavalla

$$s(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Lauseen 7.6.1 kohdan (4) perusteella nähdään, että $\frac{d}{dt} s(t) = 2\delta(t)$. Tällöin Lauseen 7.3.1 nojalla saadaan

$$iw \mathcal{F}(s(t); w) = 2 \mathcal{F}(\delta(t); w) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Siten $\mathcal{F}(s(t); w) = \frac{2}{iw}$ ($w \neq 0$).

Esimerkki 7.6.2. Johdetaan kompleksisen eksponenttifunktion $f(t) = e^{iw_0 t}$ Fourier-muunnos:

$$\mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{F}(1 \cdot e^{iw_0 t}; w) = \mathcal{F}(1; w - w_0) = 2\pi\delta(w - w_0) = \begin{cases} 2\pi, & \text{kun } w = w_0, \\ 0, & \text{kun } w \neq w_0. \end{cases}$$

Yleisemmin olkoot $w_1, w_2, \dots, w_n$ reaalitykijua ja tarkastellaan funktiota $g(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{iw_k t}$, missä $a_k \in \mathbb{C}$ $k = 1, \dots, n$. Tällöin $g(t)$:n Fourier-muunnokseksi saadaan

$$\mathcal{F}(g(t); w) = \mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^n a_k e^{iw_k t}; w\right) = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(e^{iw_k t}; w) = 2\pi \sum_{k=1}^n a_k \delta(w - w_k).$$

Siis kun funktio $g(t)$ koostuu *harmonisista taajuuskomponenteista* $e^{iw_k t}$, $k = 1, \dots, n$, niin sen Fourier-muunnoksen kuvaajassa esiintyy ”piikit” $2\pi a_k$ kohdissa w_k , $k = 1, \dots, n$, ja $\mathcal{F}(g(t); w) = 0$ kun $w \neq w_k$, $k = 1, \dots, n$. $\mathcal{F}(g(t); w)$:n kuvaaja näyttää seuraavalta (vrt. moniste!)

Vertaa g :n Fourier-sarjan esitystä *taajuusalueessa* g :n *spektrin avulla*!

Fourier-muunnos $\hat{f}(w)$ esittää alkuperäistä funktiota $f(t)$ *taajuusalueessa*, jolloin taajuuskomponentteja e^{iwt} voi esiintyä millä tahansa taajuudella $w \in \mathbb{R}$. Esittämällä Fourier-muunnos $\hat{f}(w)$ kompleksitason napakoordinaatistossa (modulin ja argumentin avulla)

$$\hat{f}(w) = |\hat{f}(w)| e^{i \arg(\hat{f}(w))}$$

päädytään f :n amplitudi- ja vaihespektriin:

$$\begin{aligned} w \rightarrow |\hat{f}(w)| & \quad \text{amplitudispektri} \\ w \rightarrow \arg(\hat{f}(w)) & \quad \text{vaihespektri} \end{aligned}$$

Myös (signaalin) keskinääräisellä teholla on vastineensa:

$$E := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Jaksottomien funktioiden tapauksessa ko. integraalia kutsutaan yleensä (signaalin) $f(t)$ *energiaksi*.

Lause 7.6.3. (Parsevalin yhtälö)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw.$$

Todistus. Kirjoitetaan $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(w); t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw$, jolloin

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right] \overline{\widehat{f}(w)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \overline{\widehat{f}(w)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 dw. \end{aligned}$$

□

Yhtälön voi tulkita niin, että signaalin energia E jakautuu taajuuskomponenteille yli $\mathbb{R}$:n *spektritiheyden* $\frac{1}{2\pi} |\widehat{f}(w)|^2$ osoittamassa suhteessa. Integraali

$$\frac{1}{2\pi} \int_{w_1}^{w_2} |\widehat{f}(w)|^2 dw$$

kuvaa signaalin energiaa taajuuksivälillä $[w_1, w_2]$.

Esimerkki 7.6.4. Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Esimerkin 7.1.2 nojalla $\widehat{f}(w) = 2 \frac{\sin(w)}{w}$. Nyt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2$$

ja toisaalta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(w)}{w} \right)^2 dw = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(w)}{w} \right)^2 dw$$

Soveltamalla Lauseen 7.6.3 tulosta saamme yhtälön

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(w)}{w} \right)^2 dw = \pi.$$

Tämä osoittaa kuinka Parsevalin yhtälön avulla voi laskea hankalienkin (epäoleellisten) integraalien arvoja kätevästi.

7.7 Sovellus differentiaaliyhtälöihin

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$-f''(t) + a^2 f(t) = g(t),$$

missä $a \neq 0$ on kiinteä vakio. Tehtävänä on ratkaista funktio f , kun g on jokin annettu funktio ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Muunnetaan annettu yhtälö ottamalla siitä puolittain Fourier-muunnos. Soveltamalla Lausetta 7.4.1 ja Seurausta 7.4.2 saadaan Fourier-muunnoksille yhtälöt

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}(f''(t); w) + a^2 \mathcal{F}(f(t); w) &= \mathcal{F}(g(t); w) \\ \iff -(iw)^2 \mathcal{F}(f(t); w) + a^2 \mathcal{F}(f(t); w) &= \mathcal{F}(g(t); w) \end{aligned}$$

eli

$$(w^2 + a^2) \mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{F}(g(t); w).$$

Tästä voidaan ratkaista funktion f Fourier-muunnos:

$$(7.5) \quad \mathcal{F}(f(t); w) = \frac{1}{w^2 + a^2} \mathcal{F}(g(t); w).$$

Huomioimalla, että (kts. liitetaulukot A)

$$\mathcal{F}(e^{-a|t|}; w) = \frac{2a}{a^2 + w^2},$$

saadaan

$$\frac{1}{w^2 + a^2} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2a} e^{-a|t|}; w\right) = \mathcal{F}(h(t); w),$$

missä $h(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$. Yhtälö (7.5) voidaan kirjoittaa nyt muodossa

$$\mathcal{F}(f(t); w) = \mathcal{F}(h(t); w) \mathcal{F}(g(t); w) = \mathcal{F}((h * g)(t); w),$$

josta käänteismuunnoksella saadaan haettu ratkaisufunktio

$$f(t) = (h * g)(t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-s|} g(s) ds.$$

Vastaavalla tavalla voidaan johtaa useiden muidenkin differentiaali- ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisukaavoja.

Esimerkki 7.7.1. Epähomogeenisen differentiaaliyhtälön

$$f'(t) + af(t) = g(t), \quad a \text{ vakio}$$

eräs ratkaisu saadaan kaavalla

$$f(t) = e^{-at} \int_{-\infty}^t e^{as} g(s) ds.$$

Kaavan johto: Harj. teht.

7.8 Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Palaudetaan miehen, että T -jaksollisen funktion f kompleksinen Fourier-sarja on muotoa

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Kun f :n Fourier-sarjan summa lasketaan vain kokonaislukupisteissä $t = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, saadaan sarjasta *diskreetti funktio* $\mathcal{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\mathcal{X}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kn}{T}}.$$

Kun jakson pituus on positiivinen kokonaisluku $T = N$, havaitaan, että

$$e^{i\frac{2\pi(k+N)n}{N}} = e^{i\frac{2\pi kn}{N}} e^{i2\pi n} = e^{i\frac{2\pi kn}{N}}.$$

Näin ollen taajuuskomponenteille $\mathcal{X}_k(n) = e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, on voimassa:

$$\mathcal{X}_{k+N}(n) = \mathcal{X}_k(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Siten diskreetin funktion $\mathcal{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-sarjassa erilaisia taajuuskomponentteja N -jaksollisessa tapauksessa on N kappaletta: $\mathcal{X}_0(n)$, $\mathcal{X}_1(n)$, $\dots$, $\mathcal{X}_{N-1}(n)$. Näin päädytään *diskreetin N -jaksollisen funktion $\mathcal{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreettiin Fourier-sarjaan*:

$$\mathcal{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{X}(n) e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

missä c_k on funktion $\mathcal{X}$ *diskreetti Fourier-kerroin*. Näistä kertoimista saadaan diskreetti kuvaus $\mathfrak{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathfrak{X}(k) = c_k$ eli kompleksilukujono

$$\mathfrak{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{X}(n) e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

jota sanotaan N -jaksollisen funktion $\mathcal{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ N pisteen *diskreetiksi Fourier-muunnokseksi (DFT)*.

Huom. 7.8.1. Lauseen 7.6.1 kohdan (1) nojalla havaitaan, että

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(t) \delta(t-n) e^{-i\frac{2\pi kt}{N}} dt = \frac{1}{N} \mathcal{F} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(t) \delta(t-n); \frac{2\pi k}{N} \right) \\ &= \mathcal{F} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(Nt) \delta(Nt-n); 2\pi k \right), \end{aligned}$$

vrt. Lause 7.3.1. Siis käyttämällä apuna deltafunktioita δ nähdään, että kyseessä on todella diskreetin funktion Fourier-muunnos. Tämän perusteella DFT:llä on vastaavat ominaisuudet kuin Fourier-muunnoksella (Vrt. esim. Lause 7.3.1: lineaarisuus/siirto/taajuussiiro/skaalaus).

Huom. 7.8.2. N -pisteen diskreetti Fourier-muunnos on N -jaksollinen ts.

$$\mathfrak{X}(k + N) = \mathfrak{X}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Näin ollen N -pisteen diskreetille Fourier-muunnokselle riittää laskea arvot $\mathfrak{X}(0)$, $\mathfrak{X}(1)$, $\dots$, $\mathfrak{X}(n-1)$.

Esimerkki 7.8.3. Jono $(\mathcal{X}(0), \mathcal{X}(1), \mathcal{X}(2), \mathcal{X}(3)) = (1, 1, 0, 0)$ määrää 4-jaksollisen funktion $\mathcal{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Lasketaan sen diskreetti Fourier-muunnos. Riittää laskea Fourier-kertoimet $\mathfrak{X}(0)$, $\mathfrak{X}(1)$, $\mathfrak{X}(2)$, $\mathfrak{X}(3)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(0) &= \frac{1}{4} [\mathcal{X}(0) + \mathcal{X}(1) + \mathcal{X}(2) + \mathcal{X}(3)] e^0 = \frac{1}{4} [1 + 1 + 0 + 0] = \frac{1}{2}, \\ \mathfrak{X}(1) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \mathcal{X}(n) e^{-\frac{i\pi n}{2}} = \frac{1}{4} [1e^0 + 1e^{-\frac{i\pi}{2}} + 0 + 0] = \frac{1-i}{4}, \\ \mathfrak{X}(2) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \mathcal{X}(n) e^{-i\pi n} = \frac{1}{4} [1e^0 + 1e^{-i\pi} + 0 + 0] = 0, \\ \mathfrak{X}(3) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \mathcal{X}(n) e^{-\frac{3i\pi n}{2}} = \frac{1}{4} [1e^0 + 1e^{-\frac{3i\pi}{2}} + 0 + 0] = \frac{1+i}{4}. \end{aligned}$$

Diskreettiin Fourier-muunnokseen liittyy myös käänteismuunnos, ns. *diskreetti Fourier-käänteismuunnos (IDFT)*:

$$\mathfrak{X}^{-1}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{X}(k) e^{\frac{i2\pi nk}{N}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Merk. myös:

$$DF^{-1}(\mathfrak{X}(k)) = \mathfrak{X}^{-1}(n).$$

Jos tässä $\mathfrak{X}(k) = DF(\mathcal{X}(n))$ (ts. $\mathfrak{X}$ on $\mathcal{X}$:n DFT), niin

$$DF^{-1}(\mathfrak{X}(k)) = \mathcal{X}(n)$$

eli käänteismuunnos antaa alkuperäisen funktion $\mathcal{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Esimerkki 7.8.4. Lasketaan edellisen esim. jonoon $(\mathfrak{X}(0), \mathfrak{X}(1), \mathfrak{X}(2), \mathfrak{X}(3))$ liittyvä diskreetti Fourier-käänteismuunnos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{-1}(0) &= [\mathfrak{X}(0) + \mathfrak{X}(1) + \mathfrak{X}(2) + \mathfrak{X}(3)] e^0 = \frac{1}{2} + \frac{1-i}{4} + 0 + \frac{1+i}{4} = 1, \\ \mathfrak{X}^{-1}(1) &= \left[\mathfrak{X}(0)e^0 + \mathfrak{X}(1)e^{\frac{i\pi}{2}} + \mathfrak{X}(2)e^{i\pi} + \mathfrak{X}(3)e^{\frac{3i\pi}{2}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{(1-i)i}{4} + 0 + \frac{(1+i)(-i)}{4} = 1, \\ \mathfrak{X}^{-1}(2) &= [\mathfrak{X}(0)e^0 + \mathfrak{X}(1)e^{i\pi} + \mathfrak{X}(2)e^{2i\pi} + \mathfrak{X}(3)e^{3i\pi}] = \frac{1}{2} + \frac{(1-i)(-1)}{4} + 0 + \frac{(1+i)(-1)}{4} = 0, \\ \mathfrak{X}^{-1}(3) &= \left[\mathfrak{X}(0)e^0 + \mathfrak{X}(1)e^{\frac{3i\pi}{2}} + \mathfrak{X}(2)e^{3i\pi} + \mathfrak{X}(3)e^{\frac{9i\pi}{2}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{(1-i)(-i)}{4} + 0 + \frac{(1+i)(i)}{4} = 0. \end{aligned}$$

Siis $\mathfrak{X}^{-1}(n) = \mathcal{X}(n)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Huom. 7.8.5. Myös N -pisteen diskreetti Fourier-käänteismuunnos on N -jaksollinen, ts.

$$\mathfrak{X}^{-1}(n + N) = \mathfrak{X}^{-1}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Perustelu on sama kuin yllä: eksponenttifunktio on kompleksialueessa $2\pi i$ -jaksollinen.

Konvoluutioteoreema (kts. Lause 7.5.2) pätee myös diskreetille Fourier+muunnookselle seuraavassa muodossa:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{X}(k) \mathfrak{Y}(k) e^{\frac{i2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{X}(m) \mathcal{Y}(n - m) =: \frac{1}{N} (\mathcal{X} * \mathcal{Y})(n)$$

eli

$$DF^{-1}(\mathfrak{X}(k) \mathfrak{Y}(k))(n) = \frac{1}{N} (x * y)(n).$$

Luku 8: $\mathcal{Z}$ -MUUNNOS

8.1 $\mathcal{Z}$ -muunnos ja sen käänteismuunnos

$\mathcal{Z}$ -muunnos on diskreetti(aikainen) muunnos, joka suoritetaan lukujonoon (vrt. diskreetti Fourier-muunnos). Olkoon $x(n)$ jono, ts. $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tai $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, reaali- tai kompleksilukujen jono. Jonon $\mathcal{Z}$ -puolinen $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$(8.1) \quad \mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

missä $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Merk. myös $\mathcal{X}(z) = \mathcal{Z}(x(n); z)$. $\mathcal{Z}$ -muunnos on siis kompleksimuuttujan z kompleksiarvoinen kuvaus. Kyseessä on itse asiassa *Laurent-sarja*, joita tarkasteltiin kompleksianalyysin kurssilla. Tavalliseen Laurent-sarjaan verrattuna sarjassa (8.1) esiintyy muuttuja $\frac{1}{z}$ muuttujan z asemasta. Jos $\mathcal{Z}$ -muunnos on olemassa jossakin pisteessä $z \in \mathbb{C}$, niin tiedämme, että ko. sarja *suppenee renkasalueessa*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < z < R\},$$

missä $0 \leq r < R \leq \infty$. Siten D on $\mathcal{Z}$ -muunnoksen määrittelyjoukko. $\mathcal{Z}$ -muunnokseen liittyy $\mathcal{Z}$ -käänteismuunnos, joka liittyy annettuun kompleksifunktioon

$$(8.2) \quad \mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

sen yo. muotoa olevan *Laurent-sarjan kertoimet* $x(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. $\mathcal{Z}$ -käänteismuunnosta merkitään symbolilla $\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{X}(z))$. Kompleksianalyysistä tiedämme, että ko. Laurent-sarjan kertoimet saadaan kaavalla

$$(8.3) \quad x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Funktion $\mathcal{X}(z)$ $\mathcal{Z}$ -käänteismuunnos voidaan periaatteessa siis laskea kompleksitason käyräintegraalien avulla; kaavassa (8.3) C on umpinainen säännöllinen käyrä, joka sijaitsee renkaassa D ja kiertää kerran origon itseään leikkaamatta. Jos erityisesti $x(n) = 0$ kun $n < 0$ (tai yleisemmin $x(n) = 0$ kun $n < -n_0 \leq 0$), kyseessä on käänteinen potenssisarja, jonka $\mathcal{Z}$ -muunnos on määritelty alueessa $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ (vrt. ns. kausaalinen jono alla) ja ko. alueessa D olevan käyrän C sisäpuolelle integraalissa (8.3) jää tällöin integroitavan funktion $\mathcal{X}(z)z^{n-1}$ kaikki navat. Usein funktion $\mathcal{X}(z)$ Laurent-sarja voidaan muodostaa suoraan esimerkiksi osamurtokehittelien ja potenssisarjojen avulla, jolloin ko. integraaleja ei tarvitse erikseen laskea. Tiedämme myös, että yleisemmin ko. kertoimet $x(n)$ voidaan laskea soveltamalla funktioon $\mathcal{X}(z)z^{n-1}$ Residy-lausetta (katso kompleksianalyysin osuutta): $x(n) = \sum_{\{a_j \text{ napa}\}} \text{Res}(\mathcal{X}(z)z^{n-1})$.

Esimerkki 8.1.1. Jonon $x(-2) = x(2) = 1$, $x(-1) = x(1) = 2$, $x(0) = 3$ ja $x(n) = 0$ muulloin. 2-puolinen $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$\mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = z^2 + 2z + 3 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Esimerkki 8.1.2. $x(n) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ja $x(n) = 0$, $n < 0$. Tällöin

$$\mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

ja kyseinen sarja suppenee alueessa $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Useissa sovelluksissa tarkastellaan ns. *kausaalisten jonojen* $x(n)$, missä $x(n) = 0$, kun $n < 0$, $\mathcal{Z}$ -muunnoksia:

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Kyseessä on ns. *1-puolinen $\mathcal{Z}$ -muunnos*.

Esimerkki 8.1.3. Jonon $x(n) = a^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$\mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a},$$

ja ko. sarja suppenee arvoilla $|z| > |a|$.

Esimerkki 8.1.4. Jonon $x(n) = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(n); z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-(n+1)} = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) \\ &= -z \left(\frac{-1}{(z-1)^2} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \end{aligned}$$

ja sarja suppenee arvoilla $|z| > 1$.

Esimerkki 8.1.5. Jonon $x(n) = \frac{1}{n!}$ ($n! = n(n-1) \cdot 2 \cdot 1$), $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$\mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = e^{\frac{1}{z}},$$

ja sarja suppenee $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

8.2 $\mathcal{Z}$ -muunnoksen ominaisuuksia

$\mathcal{Z}$ -muunnoksen ominaisuudet ovat samantapaisia kuin Laplace-muunnoksen. Tarkastelemme jatkossa 1-puolisia $\mathcal{Z}$ -muunnoksia ja siten voimme olettaa, että lukujonot ovat kausaalisia (ts. $x(n) = 0$, kun $n < 0$).

Lause 8.2.1. Olkoot $x(n), y(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tai $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ja $\mathcal{X}(z) = \mathcal{Z}(x(n); z)$, $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Z}(y(n); z)$ niiden $\mathcal{Z}$ -muunnokset suppenemisalueina $D_1 = \{\alpha < |z| < \beta\}$ ja $D_2 = \{c < |z| < d\}$. Tällöin:

(1) (Lineaarisuus)

$$\mathcal{Z}(ax(n) + by(n); z) = a\mathcal{X}(z) + b\mathcal{Y}(z), \quad D = D_1 \cap D_2 \text{ ja } a, b \text{ vakioita}$$

(2) (Siirto oikealle)

$$\mathcal{Z}(x(n - n_0); z) = z^{-n_0} \mathcal{X}(z) + z^{-n_0} \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-m}, \quad D = D_1 \text{ ja } n_0 \geq 0$$

(3) (Potenssifunktiolla a^n kertominen)

$$\mathcal{Z}(a^n x(n); z) = \mathcal{X}\left(\frac{z}{a}\right), \quad D = \{|a|\alpha < |z| < |a|\beta\}$$

(4) (Funktioilla $v(n) = n$ kertominen)

$$\mathcal{Z}(nx(n); z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{X}(z), \quad D = D_1$$

(5) (Konvoluutio-ominaisuus)

$$\mathcal{Z}((x * y)(n); z) = \mathcal{X}(z) \mathcal{Y}(z), \quad D = D_1 \cap D_2,$$

missä jonojen konvoluutio määritellään kaavalla

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^n x(k) y(n - k).$$

Todistus. Perustellaan esimerkkinä kohta (2):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(n - n_0); z) &= x(-n_0) + x(1 - n_0)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-(n_0-1)} + x(0)z^{-n_0} + x(1)z^{-n_0-1} + \dots \\ &= z^{-n_0} [x(-n_0)z^{n_0} + x(1 - n_0)z^{n_0-1} + \dots + x(-1)z] + z^{-n_0} [x(0) + x(1)z^{-1} + \dots] \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-m} + z^{-n_0} \mathcal{X}(z). \end{aligned}$$

□

Huom. Lauseen 8.2.1 kohta (2) sisältää ei-kausaalisen termin, jossa arvoja $x(-n_0), x(-n_0+1), \dots, x(-1)$ käytetään tyypillisesti differenssiyhtälöiden ratkaisujen alkuehtoina (yhtälön yksikäsitteistä ratkaisua varten).

Esimerkki 8.2.2. Jonon $x(n) = na^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$\underbrace{\mathcal{Z}(na^n; z)}_{(4)} = -z \frac{d}{dz} \underbrace{\mathcal{Z}(a^n)}_{\text{Esim. 8.1.3}} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{az}{(z-a)^2},$$

ja sarja suppenee, kun $z > |a|$.

Esimerkki 8.2.3. $x(n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Jonon $y(n) = x(n-2) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$ $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$\underbrace{\mathcal{Z}(y(n); z)}_{(2)} = z^{-2} \frac{z}{z - \frac{4}{5}} + z^{-2} \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} z^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} z \right) = \frac{5}{5z^2 - 4z} + \frac{5}{4z} + \frac{25}{16},$$

ja sarja suppenee, kun $|z| > \frac{4}{5}$. Tässä jono $x(n-2)$ ei ole kausaalinen, sillä $x(-1) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$, $x(-2) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$. Nämä (alku)arvot liittyvät usein ns. alkuarvoehtoihin (vrt. differenssiyhtälöt).

Esimerkki 8.2.4. Olkoon $\mathcal{X}(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}$. Lasketaan $\mathcal{X}(z)$:n $\mathcal{Z}$ -käänteismuunnos $\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{X}(z); n)$. Merkitään $\mathcal{U}(z) = \frac{z}{z-2}$, $\mathcal{V}(z) = \frac{z}{z-3}$. Tällöin $\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{U}(z); n) = u(n) = 2^n$ ja $\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{V}(z); n) = v(n) = 3^n$. Konvoluutio-ominaisuus (5) antaa siten

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{X}(z); n) &= \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{U}(z)\mathcal{V}(z); n) = (u * v)(n) = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 3^{n+1} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vertailun vuoksi lasketaan vastaava tulos osamurtokehityksen avulla. Kirjoitetaan

$$\frac{z^2}{(z-2)(z-3)} = A \frac{z}{z-2} + B \frac{z}{z-3},$$

mistä ratkaisemalla A, B saadaan $A = -2$, $B = 3$. Siten

$$\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{X}(z); n) = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = -2^{n+1} + 3^{n+1} = 3^{n+1} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right].$$

Lasketaan lopuksi vastaava tulos residy-menetelmällä. Funktion $\mathcal{X}(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}$ navat 2 ja 3 ovat selvästi yksinkertaisia. Niinpä

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{\{a_j \text{ napa}\}} \text{Res} \frac{z^2 z^{n-1}}{(z-2)(z-3)} = \left[\frac{z^2 z^{n-1}}{z-3} \right]_{z=2} + \left[\frac{z^2 z^{n-1}}{z-2} \right]_{z=3} \\ &= \frac{2^{n+1}}{-1} + \frac{3^{n+1}}{1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}. \end{aligned}$$

8.3 Differenssiyhtälöiden ratkaiseminen $\mathcal{Z}$ -muunnoksella

Kertalukua N oleva differenssiyhtälö on muotoa

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = x(n)$$

missä $x(n)$ on annettu jono ja jono $y(n)$ on haettavana oleva differenssiyhtälön ratkaisu.

Esimerkki 8.3.1. 1-kertaluvun differenssiyhtälö on muotoa

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$$

ja 2-kertaluvun differenssiyhtälö on vastaavasti muotoa

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n).$$

Esimerkki 8.3.2. Ratkaistaan rekursiivisesti 1-kertaluvun differenssiyhtälö

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = 1,$$

alkuehdolla $y(-1) = 0$.

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 - \frac{1}{2}y(-1) = 1 \\ y(1) &= 1 - \frac{1}{2}y(0) = \frac{1}{2} \\ y(2) &= 1 - \frac{1}{2}y(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ y(3) &= 1 - \frac{1}{2}y(2) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Samoilla periaatteilla kuin differentiaaliyhtälöitä ratkaistiin Laplace-muunnoksella, voidaan differenssiyhtälöitä ratkaista $\mathcal{Z}$ -muunnoksen avulla. Tarkastelemme asiaa esimerkkien avulla.

1-kertaluvun differenssiyhtälö:

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)$$

Otetaan puolittain $\mathcal{Z}$ -muunnos

$$\mathcal{Y}(z) + a(z^{-1}\mathcal{Y}(z) + y(-1)) = \mathcal{X}(z).$$

Asetetaan alkuehto $y(-1) = 0$ (kausaalisuus), jolloin

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{1 + \frac{a}{z}} \mathcal{X}(z).$$

Tässä $\mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 + \frac{a}{z}} = \frac{z}{z+a}$ on (diskreetin) systeemin siirtofunktio.

Esimerkki 8.3.3. $y(n) - y(n-1) = \delta(n)$, $y(-1) = 0$ ($n \geq 0$). Tässä $\delta(n)$ on δ -funktio, ts.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Nyt $\mathcal{Z}(\delta(n); z) \equiv 1$ ja $a = -1$, jolloin $H(z) = \frac{z}{z-1}$. Siten yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \mathcal{H}(z)\mathcal{Z}(\delta(n); z) = \mathcal{H}(z) \cdot 1 = \mathcal{H}(z) \\ \iff y(n) &= \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{H}(z); n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(Vrt. Esimerkki 8.1.2.)

Huomaa, että saadun ratkaisun oikeellisuus on helppo tarkistaa. Selvästi kausaalisen jonon $y(n) \equiv 1$ ($n \geq 0$) differenssille pätee: $y(n) - y(n-1) = 1$, kun $n = 0$ (sillä $y(-1) = 0$ kausaalisuuden nojalla) ja $y(n) - y(n-1) = 0$, kun $n > 0$.

Esimerkki 8.3.4. $y(n) - y(n-1) = 1$, $y(-1) = 0$. Nyt $\mathcal{Z}(1; z) = \frac{z}{z-1}$, joten $Y(z) = H(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$. Osamurtokehitelmää käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} \\ \iff y(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}; n\right) + \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-1}; n\right) = n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Tarkistus: $y(n) - y(n-1) = (n+1) - (n-1+1) = (n+1) - n = 1$, kun $n \geq 0$.

Toisinaan $\mathcal{Z}$ -muunnoksen *siirtokaava* (2) esiintyy muodossa.

Siirtokaava (2'):

$$\mathcal{Z}(x(n+n_0); z) = z^{n_0}\mathcal{Z}(x(n); z) - (z^{n_0}x(0) + z^{n_0-1}x(1) + \dots + x(n_0-1)z).$$

Kaava (2') (vastaavasti myös aiempi kaava (2)) seuraa yhtälöstä

$$\begin{aligned} z^{n_0}\mathcal{Z}(x(n); z) &= z^{n_0} \left[x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(n_0-1)z^{-(n_0-1)} + x(n_0)z^{-n_0} + \dots \right] \\ &= z^{n_0}x(0) + z^{n_0-1}x(1) + \dots + x(n_0-1)z + [x(n_0) + x(n_0+1)z^{-1} + \dots]. \end{aligned}$$

Tällöin differenssiyhtälössä on kiinnitettävä alkuarvot $x(0), x(1), \dots, x(n_0-1)$, kun kyseessä on kertalukua n_0 oleva yhtälö.

Esimerkki 8.3.5. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 0; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Soveltamalla $\mathcal{Z}$ -muunnosta saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} z^2\mathcal{Y}(z) - z^2y(0) - zy(1) + 3(z\mathcal{Y}(z) - zy(0)) + 2\mathcal{Y}(z) &= 0 \\ \iff (z^2 + 3z + 2)\mathcal{Y}(z) &= z^2 + 5z \\ \iff \mathcal{Y}(z) &= \frac{z^2 + 5z}{(z+1)(z+2)} = \frac{4z}{z+1} - \frac{3z}{z+2}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan $\mathcal{Z}$ -käänteismuunnoksella annetun differenssiyhtälön ratkaisu

$$y(n) = 4(-1)^n - 3(-2)^n = (-1)^n[4 - 3 \cdot 2^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Huom. Kuten yllä jo muutamassa esimerkissä nähtiin differenssiyhtälöille (aivan kuten differentiaaliyhtälöidenkin tapauksessa) saatu ratkaisu on yleensä helppo tarkastaa sijoittamalla ratkaisuna saatu jono alkuperäiseen differenssiyhtälöön ja todeta, että ko. ratkaisujono toteuttaa annetun yhtälön.

Liite A: FOURIER-MUUNNOSKAAVOJA

A.1 Fourier-sarja

2L-jaksoinen funktion $f(t)$ Fourier-sarja

Trigonometrinen muoto

$$f(t) \sim S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{L}t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}t)),$$

missä

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\frac{n\pi}{L}t) dt, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin(\frac{n\pi}{L}t) dt.$$

EkspONENTTI- eli kompleksimuoto

$$f(t) \sim S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi}{L}t} dt$$

eli

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{ja} \quad c_{-n} = \overline{c_n}.$$

Parsevalin yhtälö

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

A.2 Fourier-muunnos

$$F(w) = \mathcal{F}(f(t); w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

Käänteismuunnos $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(w); t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{itw} dw$

Lineaarisuus $\mathcal{F}(af(t) + bg(t); w) = a\mathcal{F}(f(t); w) + b\mathcal{F}(g(t); w)$

Skaalaus $\mathcal{F}(f(at); w) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(f(t); \frac{w}{a}) \quad (a > 0)$

Siirto $\mathcal{F}(f(t - t_0); w) = e^{-iwt_0} \mathcal{F}(f(t); w)$

Taajuussiirto $\mathcal{F}(f(t) e^{i w_0 t}; w) = \mathcal{F}(f(t); w - w_0)$

Konvoluutio $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t - s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - s) g(s) ds$

Konvoluutioteoreema $\mathcal{F}((f * g)(t); w) = \mathcal{F}(f(t); w) \mathcal{F}(g(t); w)$

Derivaatan muunnos $\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t); w\right) = (iw)^n \mathcal{F}(f(t); w)$

Integraalin muunnos $\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(s) ds; w\right) = \frac{\mathcal{F}(f(t); w)}{iw} + \pi \delta(w) \mathcal{F}(f(t); 0)$

Parsevalin yhtälö $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f(t); w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$

A.3 Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

$$X(k) = \mathfrak{F}(x(n); k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-ink \frac{2\pi}{N}}$$

Käänteismuunnos $x(n) = \mathfrak{F}^{-1}(X(k); n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{ink \frac{2\pi}{N}}$
 Lineaarisuus $\mathfrak{F}(ax(n) + by(n); k) = a\mathfrak{F}(x(n); k) + b\mathfrak{F}(y(n); k)$

Siirto $\mathfrak{F}(x(n - n_0); k) = e^{-in_0 k \frac{2\pi}{N}} \mathfrak{F}(x(n); k)$

Modulaatio $\mathfrak{F}\left(e^{ink_0 \frac{2\pi}{N}} x(n); k\right) = \mathfrak{F}(x(n); k - k_0)$

Konvoluutio $(x * y)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n - k)$

Konvoluution muunnos $\mathfrak{F}(x(n); k) \mathfrak{F}(y(n); k) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{N} (x * y)(n); k\right)$

Funktio	Fourier-muunnos
$\begin{cases} 1, & b < t < c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw}$
$\begin{cases} 1, & -c < t < c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$	$\frac{2 \sin(cw)}{w}$
$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{w^2 + a^2}$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$\frac{\sin(at)}{t}, \quad a > 0$	$\begin{cases} \pi, & w < a \\ 0, & w > a \end{cases}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}, \quad a > 0$	$\frac{\pi}{a} e^{-a w }$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(w)$
e^{iw_0t}	$2\pi\delta(w - w_0)$
$s(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	$\frac{2}{iw}$
$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{iw} + \pi\delta(w)$
$u(t)e^{-at}, \quad a > 0$	$\frac{1}{a + iw}$
$\cos(at)$	$\pi [\delta(w - a) + \delta(w + a)]$
$\sin(at)$	$-i\pi [\delta(w - a) - \delta(w + a)]$

Taulukko A.1: Fourier-muunnoksia.

Liite B: LAPLACE-MUUNNOSKAAVOJA

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t); s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Käänteismuunnos} \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s); t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{ts} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(s)e^{ts} ds = \sum_{a_j: F:n \text{ napa}} \text{Res}_{s=a_j} \{F(s)e^{st}\} \end{aligned}$$

$$\text{Lineaarisuus} \quad \mathcal{L}(af(t) + bg(t); s) = a\mathcal{L}(f(t); s) + b\mathcal{L}(g(t); s)$$

$$\text{Skaalaus} \quad \mathcal{L}(f(at); s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f(t); \frac{s}{a}) \quad (a > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Siirto oikealle} \quad \mathcal{L}(u(t-t_0)f(t-t_0); s) &= e^{-st_0} \mathcal{L}(f(t); s), \\ \text{missä } u(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{ja } t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Eksponenttifunktiolla kertominen} \quad \mathcal{L}(e^{at}f(t); s) = \mathcal{L}(f(t); s-a)$$

$$\begin{aligned} \text{Derivaatan muunnos} \quad \mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t); s\right) &= s^n \mathcal{L}(f(t); s) - s^{n-1}f(0) \\ &\quad - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

$$\text{Integraalin muunnos} \quad \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du; s\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t); s)$$

$$\text{Potenssifunktiolla kertominen} \quad \mathcal{L}((t^n f(t); s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f(t); s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Laplace-muunnoksen integraali} \quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{t} f(t); s\right) = \int_s^\infty F(u) du$$

$$\text{Jaksollisen funktion muunnos} \quad \mathcal{L}(f(t); s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1-e^{-sT}}, \quad f(t+T) = f(t)$$

$$\text{Konvoluutio} \quad (f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds$$

$$\text{Konvoluution muunnos} \quad \mathcal{L}((f * g)(t); s) = \mathcal{L}(f(t); s) \mathcal{L}(g(t); s)$$

Taulukossa B.1 Laplace-muunnos määritelty arvoilla $\operatorname{Re} s > 0$, ellei toisin mainita.

Funktio	Laplace-muunnos
$\delta(t)$	1
1 tai $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad (\operatorname{Re} s > a)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$1 - \cos(at)$	$\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad (\operatorname{Re} s > \max\{0, a\})$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad (\operatorname{Re} s > a)$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad (\operatorname{Re} s > a)$

Taulukko B.1: Laplace-muunnoksia.

Liite C: $\mathcal{Z}$ -MUUNNOSKAAVOJA

Kaksipuolinen $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$X(z) = \mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

ja yksipuolinen $\mathcal{Z}$ -muunnos on

$$X(z) = \mathcal{Z}(x(n); z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Käänteismuunnos

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z); n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

Lineaarisuus

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(ax(n) + by(n); z) &= a\mathcal{Z}(x(n); z) + b\mathcal{Z}(y(n); z) \\ D &= D_1 \cap D_2 \quad (D_1 \text{ on } X(z)\text{:n, } D_2 \text{ } Y(z)\text{:n suppenemisalue}) \end{aligned}$$

Yksipuolinen siirto oikealle

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(n - n_0); z) &= z^{-n_0} \mathcal{Z}(x(n); z) + z^{-n_0} \sum_{k=-n_0}^{-1} x(k)z^{-k} \\ D &= D_1 \quad \text{ja } n_0 > 0 \end{aligned}$$

Yksipuolinen siirto vasemmalle

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(n + n_0); z) &= z^{n_0} \mathcal{Z}(x(n); z) - z^{n_0} \sum_{k=0}^{n_0-1} x(k)z^{-k} \\ D &= D_1 \quad \text{ja } n_0 > 0 \end{aligned}$$

Kaksipuolinen siirto

$$\mathcal{Z}(x(n - n_0); z) = z^{-n_0} \mathcal{Z}(x(n); z), \quad D = D_1$$

Potenssifunktiolla kertominen

$$\mathcal{Z}(a^n x(n); z) = \mathcal{Z}\left(x(n); \frac{z}{a}\right), \quad D = \{|a|\alpha < |z| < |a|\beta\}$$

Funktiolla n kertominen

$$\mathcal{Z}(nx(n); z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}(x(n); z), \quad D = D_1$$

Konvoluutio

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^n x(k)y(n - k)$$

Konvoluution muunnos

$$\mathcal{Z}((x * y)(n); z) = \mathcal{Z}(x(n); z) \mathcal{Z}(y(n); z), \quad D = D_1 \cap D_2$$

Sarja	$\mathcal{Z}$ -muunnos	Suppenemisarvo
$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$	$D = \{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$
$a^n u(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-a}$	$D = \{z \in \mathbb{C} : z > a \}$
$nu(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$D = \{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$
$na^n u(n) = \begin{cases} na^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$D = \{z \in \mathbb{C} : z > a \}$
$\begin{cases} \frac{1}{n!}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$e^{\frac{1}{z}}$	$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\delta(n)$	1	$D = \mathbb{C}$
$\delta(n - n_0)$	z^{-n_0}	$D = \mathbb{C}, n_0 \leq 0$, ja $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}, n_0 > 0$

Taulukko C.1: $\mathcal{Z}$ -muunnoksia.

Liite D: KOMPLEKSI ANALYYSI

Kompleksianalyysin kaavoja:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right].$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}_+} \operatorname{Res} f(z)$$

KIRJALLISUUS

- [1] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th ed., Wiley, New York, 1999.
- [2] A. Niemi, *Fourier-analyysi ja Laplace-muunnos*, 5. painos, Hakapaino Oy, Opetushallitus, Helsinki, 1999.