

Kompleksianalyysi ja integraalimuunnokset (2019)

Harjoitus 5/viikko 42

Huom 1. Kurssin 1. välikoe on PE 18.10.2019 klo 10:00-12:00. Sali F118.

Koealue: Luentomonisteen luvut 1-3 sekä harjoitukset 1-5.

Huom 2. Kurssin vapaaehtoiset laskupaja-ajat ja salit löytyvät nyt Lukkarista. Niissä käydään läpi kurssin harjoituksia ja niiden laskemiseen liittyviä asioita sekä annetaan preppausta tulevaan välikokeeseen.

1. Laske $\oint_C \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz$, kun

a) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \pi| = 3\}$ on suunnistettu vastapäivään.

b) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \pi| = 4\}$ on suunnistettu vastapäivään. (Vrt. HT 3.5.)

2. Laske residy-lauseen avulla $\oint_C \frac{dz}{z^4 + 9}$, kun $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = 1\}$ on suunnistettu myötäpäivään.

3. Laske residy-lauseen avulla seuraavat epäoleelliset integraalit:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

4. Laske $\int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 x) dx$ muuttajavaihdolla $z = e^{ix}$.

5. Laske residy-lauseen avulla epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{isx}}{a^2 + x^2} dx,$$

missä $a > 0, s > 0$ ovat vakiota. (Tulos liittyy funktion $f(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$ Fourier-muunnokseen.)