

Kompleksianalyysi ja integraalimuunnokset (2019)

Harjoitus 8/viikko 46

1. Laske funktion

$$g(x) = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

2. a) Laske funktion

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

b) Määritä Fourier-sarjan summa ja piirrä sen kuvaaja välillä $[-3\pi, 3\pi]$.

c) Piirrä Fourier-sarjan kolmea ensimmäistä osasummaa vastaavien funktioiden kuvaajat samaan kuvaan funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan kanssa välillä $[-\pi, \pi]$.

3. Näytä käyttämällä apuna edellisen tehtävän Fourier-sarjaa, että

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Käytä apuna funktion $f(x) = x^2$ Fourier-sarjaa (kts. HT 2 yllä) ja etsi paras muotoa $a + b \cos x + c \sin x$ oleva approksimaatio funktiolle

$$g(x) = \frac{x^2 + \sin x}{2}$$

vektoriavaruuden $C(-\pi, \pi)$ sisätulon $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$ määräämän normin suhteen.

5. a) Muodosta funktion

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

kompleksinen Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$. (Vrt. HT 2 yllä.)

b) Johda funktion $f(x) = x^2$ Fourier-sarjan ja Parsevalin kaavan avulla yhtälö

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$