Matemaattiset menetelmät I

Seppo Hassi

Syksy 2011

Esipuhe

Tämä on 1. versio Matemaattiset menetelmät I-kurssin opetusmonisteesta, joka perustuu Vaasan yliopistossa luennoimaani vastaavan nimiseen kurssiin. Sisältö noudattaa pitkälti aiempien luentomuistiinpanojeni mukaista esitystä.

Esitän kiitokseni *H.L. Wietsma:lle* (Vaasan yliopisto, matemaattisten tieteiden laitos), joka on suorittanut tekstin puhtaaksikirjoituksen LaTeX-muotoon ja piirtänyt monisteessa esiintyvät kuvat.

Vaasassa 30 syyskuuta 2011

Seppo Hassi

Sisältö

Luku 1: Johdanto

1.1 Joukko-opilliset merkinnät

Joukko muodostuu alkioista. Joukkoja merkitään yleensä isoilla ja alkioita pienillä kirjaimilla. Esimerkiksi: $a \in A$, "a kuuluu joukkoon A"ja $a \notin A$, "a ei kuulu joukkoon A".

Seuraavat lukujoukot ovat käytössä:

$\mathbb{N}$	$=$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$	luonnollisten lukujen joukko
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	kokonaislukujen joukko
$\mathbb{Q}$	$=$	$\{a/b : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$	rationaalilukujen joukko
$\mathbb{R}$			reaaliluvut, eli rationaalilukujen joukko täydennettynä irrationaaliluvuilla, kuten $\sqrt{2}, \pi, e$
$\mathbb{C}$	$=$	$\{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	kompleksiluvut (missä $i^2 = -1$)

Typpillisiä lukujoukkojen osajoukkoja ovat mm. :

$\mathbb{Z}_+$	$=$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$	positiiviset kokonaisluvut
$\mathbb{Z}_-$	$=$	$\{-1, -2, -3, \ldots\}$	negatiiviset kokonaisluvut
$\mathbb{R}_+$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	positiiviset reaaliluvut
$\mathbb{R}_-$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$	negatiiviset reaaliluvut

Usein esiintyviä joukkoja ovat reaaliakselin välit:

$[a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	suljettu väli
$]a, b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	avoin väli
$[a, b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	puoliavoin väli
$]a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	puoliavoin väli

Tällöin a ja b ovat välin *päätepisteitä*, muut pisteet ovat välin *sisäpisteitä* (Mahdollisesti $a = -\infty$, $b = \infty$).

Tyypillisiä merkintöjä:

merk.	sisältö	luetaan
$A \subset B$	jokainen A:n alkio on myös B:n alkio	A on B:n osajoukko
$A = B$	$A \subset B$ ja $B \subset A$	A ja B ovat sama joukko
$A \cup B$	$\{x : x \in A$ tai $x \in B\}$	A:n ja B:n yhdiste
$A \cap B$	$\{x : x \in A$ ja $x \in B\}$	A:n ja B:n leikkaus
$A \setminus B$	$\{x \in A : x \notin B\}$	A:n ja B:n erotus
$\emptyset$	joukko, jossa ei ole yhtään alkiota	tyhjä joukko

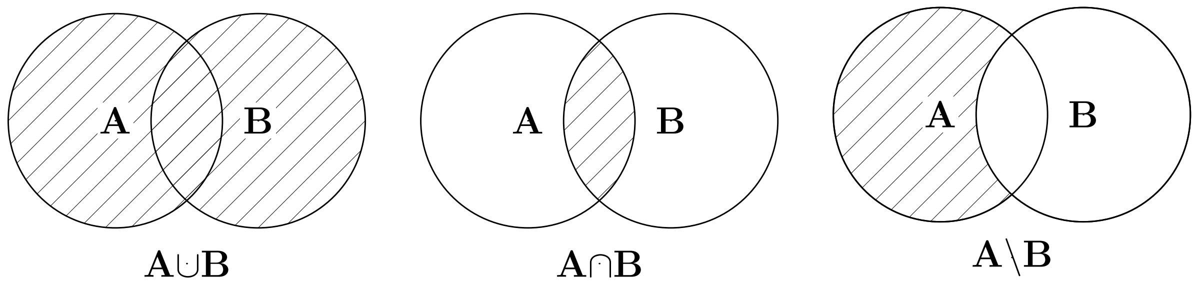
Esimerkki 1.1.1. a) $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ ja $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 1, 3\}$;

b) $\mathbb{R}_+^0 = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$ eli ei-negatiiviset reaaliluvut;

c) $A \subset A$ ja $\emptyset \subset A$ mille tahansa joukolle A;

d) $[a, b) \cup \{b\} = [a, b]$ ja $[a, b) \cap \{b\} = \emptyset$.

Yhdistettä, leikkausta ja erotusta voidaan havainnollistaa ns. *Venn-diagrammeilla*:



Kuva 1.1: Venn-diagrammeja.

Järjestetyt joukot: Kun joukko $\{a, b\}$ järjestetään, saadaan *järjestetty pari* (a, b). Kaksi järjestettyä paria (a, b) ja (c, d) ovat samat (identtiset), jos

$$a = c \quad \text{ja} \quad b = d.$$

Vastaavasti määritellään n-alkioiset *järjestetyt joukot* $(a_1, \ldots, a_n)$ ja niiden yhtäsuuruus.

Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ *tulojoukko* eli *karteesinen tulo* on joukko:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Jos $A := A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, merkitään lyhyesti $A^n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Esimerkki 1.1.2. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ on reaalilukutaso ja $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, 3-ulotteinen reaalilukuavaruus.

1.2 Logiikan symboleista

merk.	sisältö	luetaan
$\vee$	disjunktio	tai
$\wedge$	konjuktio	ja. Huom. usein käytetään vain pilkkua $\wedge$:n sijasta
$\neg$	negaatio	ei/vastakohta
$\exists$	olemassaolo kvanttori	on olemassa
$\forall$	kaikki kvanttori	kaikilla
$\Longrightarrow$	implikaatio	jos ... niin
$\Longleftrightarrow$	ekvivalenssi	jos ja vain jos/joss
$\therefore$	johtopäätös	siis/siten/täten

Matemaattiset väittämät ilmaistaan tyypillisesti lauseina, joita seuraava kaavio ilmentää:

merk.	sisältö	luetaan
$p \Longrightarrow q$	implikaatioita	jos p on tosi, niin q on tosi
$p \Longleftrightarrow q$	ekvivalensseja	$p \Longrightarrow q$ ja $q \Longrightarrow p$

Tässä p ja q sisältävät väittämän, joilla on **totuusarvo**: tosi/epätosi.

Esimerkki 1.2.1. a) Lause

$$x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 9 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

on tosi. Sen sijaan lause

$$x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 9 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

on epätosi, koska implikaatio "$\Longleftarrow$"on selvästi epätosi.

b) Lause

$$(a > b) \wedge (b > c) \quad \Longrightarrow \quad a > c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

on tosi.

c) Lause

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} \quad \text{s.e.} \quad x + y \geq 0$$

on tosi. Nimittäin, jos $x_0 \in \mathbb{Z}$ on mielivaltaisesti valittu, niin y:ksi kelpaa esimerkiksi luku $y_0 = -x_0$. (y:n valinta riippuu tässä valitusta x_0:sta.)

d) Lause

$$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \text{s.e.} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad x + y \geq 0$$

on epätosi. Nimittäin valitaanpa $x_0 \in \mathbb{Z}$ miten tahansa niin esim. valinta $y_0 = -x_0 - 1$ antaa $x_0 + y_0 = -1 < 0$.

Seuraava päättelysääntö esiintyy usein todistustehtävien yhteydessä.

Kontraposition periaate:

$$(p \Longrightarrow q) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg q \Longrightarrow \neg p).$$

Luku 2: Reaaliluvuista ja -funktioista

2.1 Reaaliluvuista

Reaalilukujen ominaisuudet voidaan palautta tiettyihin perusominaisuuksiin, jotka voidaan esittää *aksiomeina*:

A) Algebralliset ominaisuudet; kunta-aksiomat
B) Järjestysominaisuudet; järjestysaksiomat
C) Täydellisyysominaisuus; täydellisyysaksioma

Kohta A) pitää sisällään $\mathbb{R}$:n yhteenlasku - ja kertolaskusäännöt:

A1)	$x+y=y+x$	yht. lask. vaihdantalaki
A2)	$(x+y)+z=x+(y+z)$	yht. lask. liitäntälaki
A3)	$\exists 0 \in \mathbb{R}$ s.e. $\forall x \in \mathbb{R}$	
	x+0=x	on olemassa nolla-alkio
A4)	$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ s.e.	
	x+y = 0	y on x:n vastaluku
A5)	$xy = yx$	kertolaskun vaihdantalaki
A6)	$(xy)z = x(yz)$	kertolaskun liitäntälaki
A7)	$x(y+z) = xy + xz$	osittelulaki
A8)	$\exists 1 \in \mathbb{R}$ s.e. $1 \neq 0$ ja $\forall x \in \mathbb{R}$	
	$1 \cdot x = x$	on olemassa ykkösalkio
A9)	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ s.e.	
	$x \cdot y = 1$	$y = 1/x$ on x:n käänteisluku

Kohta B) liittää $\mathbb{R}$:ään *järjestysrelaation* $<$, joka toteuttaa seuraavat aksiomat:

B1) Jokaisella $x, y \in \mathbb{R}$ täsmälleen yksi relaatioista $x = y$, $x < y$ ja $y < x$ on voimassa
B2) $x < y$ ja $y < z \Rightarrow x < z$ (transitiivisuus)
B3) Jos $x < y$, niin kaikille $z \in \mathbb{R}$ pätee $x + z < y + z$
B4) Jos $x > 0$ ja $y > 0$, niin $xy > 0$.

Kohta C) erottaa reaalilukujen joukon olennaisesti rationaalilukujen joukosta.

C) Täydellisyysaksioma: Jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä $\mathbb{R}$:n osajoukolla on pienin yläraja. (Tähän palataan myöhemmin.)

Kaikki reaalilukuja koskevat laskusäännöt ja ominaisuudet voidaan johtaa edellä olevista aksiomista.

Esimerkki 2.1.1. $0 \cdot x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Todistus:

$$x \cdot x + 0 \cdot x = (x+0) \cdot x = x \cdot x = x \cdot x + 0$$

ja vähentämällä molemmilla puolilla $x \cdot x$ saadaan väite:

$$0 + 0 \cdot x = 0 + 0 \iff 0 \cdot x = 0.$$

Reaalilukujen joukko saadaan täydentämällä rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ irrationaaliluvuilla (päättymättömät jaksottomat desimaaliluvut). Jokaista reaalilukua voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Tämä mahdollistaa reaalilukujen konstruoinnin rationaaliluvuista lähtien laajentamalla joukko $\mathbb{Q}$ kaikkien $\mathbb{Q}$:n ns. *perusjonojen* eli *Cauchy'n jonojen* raja-arvoilla. Tällaisia rationaalilukujonoja ovat päättymättömät jonot

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

joilla on seuraava ominaisuus:

$$\forall \epsilon > 0 \ (\epsilon \in \mathbb{Q}) \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{s.e.} \quad |x_n - x_m| < \epsilon, \quad \text{kun } n, m > n_\epsilon.$$

Emme paneudu kyseiseen konstuktioon tämän yksityiskohtaisemmin. Seuraava esimerkki osoittaa, että $\mathbb{Q}$ on $\mathbb{R}$:n aito osajoukko.

Esimerkki 2.1.2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Todistus: Teemme vastaoletuksen: $\exists m/n \in \mathbb{Q}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ s.e. $(m/n)^2 = 2$. Voimme olettaa, että m/n on supistetussa muodossa. Johdamme ristiriidan. Nyt yhtäpitävästi $m^2 = 2n^2$. Siten 2 on luvun m^2 tekijä ja siis myös luvun m tekijä (muutoin $m = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$, jolloin $m^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ olisi 2:lla jaoton). Tällöin 4 on luvun m^2 tekijä ja yhtälön $m^2 = 2n^2$ nojalla luku 2 on luvun n^2 ja edellä olevan nojalla siis myös luvun n tekijä. Näin ollen luku 2 on lukujen m ja n yhteinen tekijä, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Väite on todistettu.

Itseisarvo: Realliluvun x *itseisarvo* $|x|$ määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0; \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Määritelmästä seuraa helposti mm. seuraavat ominaisuudet:

1) $|x| \geq 0$
2) $|-x| = |x|$
3) $|xy| = |x| \cdot |y|$
4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$
5) $|x|^2 = x^2 \iff |x| = \sqrt{x^2}$
6) $|x| < y \iff -y < x < y$ (tässä $y > 0$)
7) $|x| > y \iff x < -y$ tai $x > y$

Esimerkki 2.1.3. Ratkaise epäyhtälö $|x^2 - x| < 2x$. Ratkaisu: Kohdan 7) nojalla $x > 0$ ja edelleen

$$\begin{aligned}
& |x^2 - x| < 2x \\
\iff & -2x < x^2 - x < 2x \\
\iff & x^2 + x > 0 \text{ ja } x^2 - 3x < 0 \\
\iff & (x > 0 \vee x < -1) \text{ ja } 0 < x < 3 \\
\iff & 0 < x < 3.
\end{aligned}$$

Seuraavat itseisarvoa koskevat epäyhtälöt ovat tärkeitä.

Lause 2.1.4. (Kolmioepäyhtälöt) Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Todistus. Harj. teht. $\square$

Itseisarvoepäyhtälöiden käsittelyssä voi usein käyttää seuraavaa:

$$|x| < |y| \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 < y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Laajennettu reaalilukujoukko: Usein reaalilukujen joukko laajennetaan *ääretön-symboleilla* ∞ ja $-\infty$, merk. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nämä symbolit esiintyvät etenkin raja-arvo tarkastelujen yhteydessä ja niihin liitetään seuraavat laskusäännöt:
1) $x + \infty = x - (-\infty) = \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2) $x + (-\infty) = x - \infty = -\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$
3) $x/\infty = x/(-\infty) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
4) $\forall x > 0$: $x \cdot \infty = \infty$ ja $x \cdot (-\infty) = -\infty$
5) $\forall x < 0$: $x \cdot \infty = -\infty$ ja $x \cdot (-\infty) = \infty$
6) $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$
7) $(-\infty) + (-\infty) = \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$
8) Järjestys: $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < \infty$

Huom. Määrittelemättä jäävät mm. $\infty - \infty$, ∞/∞ ja $0 \cdot \infty$.

Esimerkki 2.1.5. Kun $x \to \infty$, niin $f(x) = 1/(x + 2) \to 0$, sillä $x + 2 \to \infty$ ja $1/(x + 2) \to 1/\infty = 0$.

Supremum ja infimum: Reaaliluku M on joukon $A \subset \mathbb{R}$ *yläraja*, jos

$$\forall x \in A \text{ pätee } x \leq M.$$

Tällöin sanotaan, että A on *ylhäältä rajoitettu*. Vastaavasti määritellään joukon *alaraja* ja *alhaalta rajoitettu* joukko. Olkoon $A \neq \emptyset$ $\mathbb{R}$:n osajoukko ja merkitään

$$B_A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ on } A\text{:n yläraja}\}.$$

Jos $B_A \neq \emptyset$, on B_A:ssä täydellisyysaksioman nojalla pienin alkio, joka on A:n pienin yläraja eli *supremum*, merk. $\sup A$. Jos joukolla A on suurin alkio $\max A$ (ts. $\max A \in A$ ja $\forall x \in A$ pätee $x \leq \max A$), niin se on myös A:n pienin yläraja: $\max A = \sup A$.

Esimerkki 2.1.6. $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$. Tällöin $\sup A = 1 \notin A$.

Rationaalilukujen joukko ei toteuta täydellisyysaksiomaa. Esimerkiksi joukko $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu $\mathbb{Q}$:ssa (2 on eräs A:n yläraja), mutta A:lla ei ole pienintä ylärajaa $\mathbb{Q}$:ssa. Sen sijaan $\mathbb{R}$:ssä supremum löytyy: $\sup A = \sqrt{2}$.

Seuraava lause on yhtäpitävä joukon A pienimmän ylärajan määritelmän kanssa.

Lause 2.1.7. Luku g on joukon A supremum jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa on täytetty:

i) $\forall x \in A$: $x \leq g$;

ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in A$ s.e. $x > g - \epsilon$.

Esimerkki 2.1.8. $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n-3}{n}, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Tällöin $\sup A = 2$.

Todistus. i) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $\frac{2n-3}{n} = 2 - \frac{3}{n} < 2$. Siis 2 on A:n yläraja.

ii) Osoitetaan, ettei pienempää A:n ylärajaa ole:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{s.e.} \quad \frac{2n-3}{n} > 2 - \epsilon.$$

Tämän todistamiseksi havaitaan, että

$$\frac{2n-3}{n} > 2 - \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{3}{n} > -\epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{3}{\epsilon}. \qquad \square$$

Joukon $A \neq \emptyset$ *suurin alaraja* eli *infimum*, merk. $\inf A$, voidaan määritellä joukon

$$C_A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ on } A\text{:n alaraja}\}$$

suurimpana alkiona, kun $C_A \neq \emptyset$. Sen olemassaolo voidaan johtaa täydellisyysaksiomasta soveltamalla supremumin olemassaoloa joukkoon $E = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ ja havaitsemalla, että $\inf A = -\sup E$. Jos joukolla A on pienin alkio $\min A$, niin se on myös A:n suurin alaraja: $\min A = \inf A$. Lauseen 2.1.7 vastine infimumille saa seuraavan muodon.

Lause 2.1.9. Luku g on joukon A infimum jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa on täytetty:

i) $\forall x \in A$: $x \geq g$;

ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in A$ s.e. $x < g + \epsilon$.

Jos joukko $A \neq \emptyset$ ei ole ylhäältä (alhaalta) rajoitettu, voidaan käyttää merkintää $\sup A = \infty$ (vast. $\inf A = -\infty$).

2.2 Relaatiot ja funktiot

Relaatiot: Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Jokainen tulojoukon $A \times B$ osajoukko $\mathbb{R}$ on *relaatio* joukosta A joukkoon B. Jos $A = B$ sanotaan, että $\mathbb{R} \subset A \times A$ on relaatio A:ssa.

Esimerkki 2.2.1. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:n osajoukkona relaatio $\mathbb{R}$:ssä.

Relaatiolle $R \subset A \times B$ voidaan määritellä *käänteisrelaatio* R^{-1} seuraavasti:

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}.$$

Esimerkki 2.2.2. $R = \{(x, y) : y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$ on relaatio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^0_+$:ssa ($\mathbb{R}^0_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$). Sen käänteisrelaatio

$$R^{-1} = \{(y, x) : y = x^2, x \in \mathbb{R}\} = \{(y, x) : y \in \mathbb{R}^0_+ \text{ ja } x = \pm\sqrt{y}\}$$

on relaatio $\mathbb{R}^0_+ \times \mathbb{R}$:ssä. Tässä R vastaa neliöön korotusta, R^{-1} neliöjuuren ottoa.

Funktiot: Relaatio f joukosta A joukkoon B on *funktio* eli *kuvaus*, jos se toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

i) $\forall x \in A\ \exists y \in B$ s.e. $(x, y) \in f$;

ii) $\forall x \in A$, $\forall y, z \in B$ pätee:

$$(x, y) \in f \text{ ja } (x, z) \in f \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

Siis jokaista A:n alkiota x vastaa relaatiossa f yksikäsitteinen joukon B alkio. Sanotaan, että f on funktio/kuvaus joukosta A joukkoon B ja merk. $f : A \to B$. Jos $(x, y) \in f$, merkitään $y = f(x)$ ja sanotaan, että x on (vapaa) muuttuja ja y funktion f arvo pisteessä x. Usein funktio määritellään antamalla kuvaussääntö $f : x \to y$.

Nimityksiä: Olkoon $f : A \to B$. Tällöin:

1) $A (= M_f)$ on f:n *määrittelyjoukko* eli *lähtöjoukko*;

2) $f(A) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ on f:n *kuvajoukko* eli *arvojoukko*;

3) Relaatiota $\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$ sanotaan f:n *kuvaajaksi*;

4) f on *injektio*, jos $\forall x, y \in A$ pätee: $f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y$;

5) f on *surjektio*, jos $f(A) = B$, ts. $\forall y \in B\ \exists x \in A$: $y = f(x)$;

6) f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

Huomioita:

a) Funktiot f ja g ovat samoja eli *identtiset* jos niillä on sama määrittelyjoukko, ts. $M_f = M_g$ ja $f(x) = g(x)\ \forall x \in M_f$.

b) Jokaisella funktiolla $f : A \to B$ on olemassa käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$. Se määrittelee kuvauksen $B \to A$, jos ja vain jos f on bijektio. Tällöin sanotaan, että $f^{-1} : B \to A$ on f:n *käänteiskuvaus*. Siten käänteiskuvaus f^{-1} on olemassa, jos ja vain jos yhtälöllä $y = f(x)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in A$ jokaisella $y \in B$.

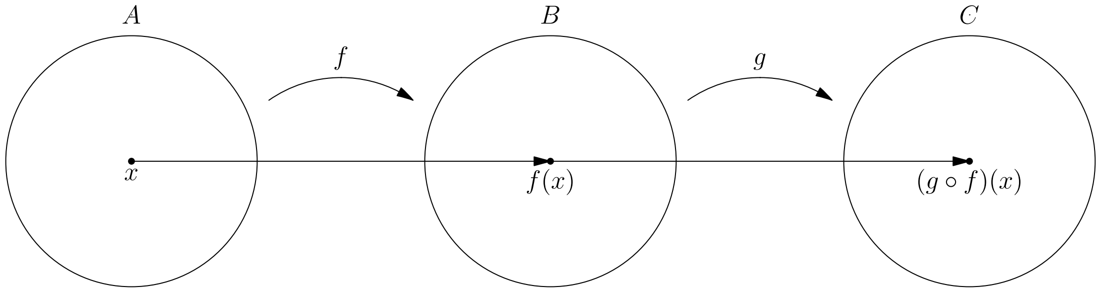
Esimerkki 2.2.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^0_+$, $y = x^2$. Tällöin f:llä ei ole käänteikuvausta $\mathbb{R}^0_+ \to \mathbb{R}$.

Kuvaus $f : A \to A$, $f(x) = x$, $\forall x \in A$, on A:n *identtinen kuvaus*, jota merk. usein $f = Id_A$.

Yhdistetty kuvaus: Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ kuvauksia. Niiden *yhdistetty kuvaus* $g \circ f$ määritellään kaavalla

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

Sanotaan, että f on sisäfunktio ja g ulkofunktio.



Kuva 2.1: f:n ja g:n yhdistetty kuvaus.

Esimerkki 2.2.4. $(x-1)^2$, $2\sqrt{x}+1$, $\sin^2(x^3)$ ja $\log(x^2+1)$.

Seuraavat tulokset ovat tyypillisiä:

i) Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat bijektioita, niin myös $g \circ f : A \to C$ on bijektio. Niiden käänteiskuvauksille pätee: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ii) Jos $f : A \to B$ on bijektio, niin $f \circ f^{-1} = Id_B$ ja $f^{-1} \circ f = Id_A$.

iii) Jos kuvauksille $f : A \to B$ ja $g : B \to A$ pätee $g \circ f = Id_A$ ja $f \circ g = Id_B$, niin f ja g ovat bijektioita ja $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$.

2.3 Yhden muuttujan reaalifunktiot

Olkoon $f : A \to B$ funktio. Jos A ja B ovat $\mathbb{R}$:n osajoukkoja sanotaan, että f on *yhden reaalisen muuttujan reaaliarvoinen funktio*, lyhyesti *reaalifunktio*.

Esimerkki 2.3.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$ ja $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x)$. $(g = f^{-1})$

Usein reaalifunktiot määritellään muuttujien x ja y välisillä yhtälöillä. Erotetaan kolme eri tapausta.

A) *Eksplisiittinen esitys:* $y = f(x)$. Tässä x:n ja y:n väliset yhtälöt on annettu tai ratkaistu y:n suhteen.

B) *Implisiittinen esitys:* $F(x, y) = 0$. Muuttujien x ja y väliset yhtälöt ovat ratkaisemattomassa muodossa. Parit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön $F(x, y) = 0$ muodostavat aina relaation. Erikseen on varmistettava esim. lähtö- tai kuvajoukkoa sopivasti rajoittamalla, että ehto $F(x, y) = 0$ todella määrittelee funktion.

C) *Parametriesitys:* $x = u(t)$ ja $y = v(t)$. Tässä x ja y riippuvat reaalisesta parametrista t. Jälleen on erikseen varmistettava, että parit $(x, y) = (u(t), v(t))$ määrittelevät funktion. Jos parametrin t eliminointi onnistuu, saadaan funktiolle ekplisiittinen tai implisiittinen esitys.

Esimerkki 2.3.2. Yhtälö $2x+3y = 6$ määrittelee funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vastaavat esitykset ovat:

a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ (eksplisiittinen esitys);

b) $2x + 3y - 6 = 0$ (implisiittinen esitys);

c) $x = 3t - 1$ ja $y = -2t + \frac{8}{3}$ $(t \in \mathbb{R})$ (eräs parametriesitys).

2.4 Reaalifunktion raja-arvo

Raja-arvon määrittelemiseksi otetaan käyttöön pisteen *ϵ-ympäristö*, joka määritellään pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ joukkona

$$U_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Tässä $\epsilon > 0$ on yleensä pieni positiivinen luku. Pisteen x_0 *aito ϵ-ympäristö* saadaan poistamalla piste x_0 sen ϵ-ympäristöstä:

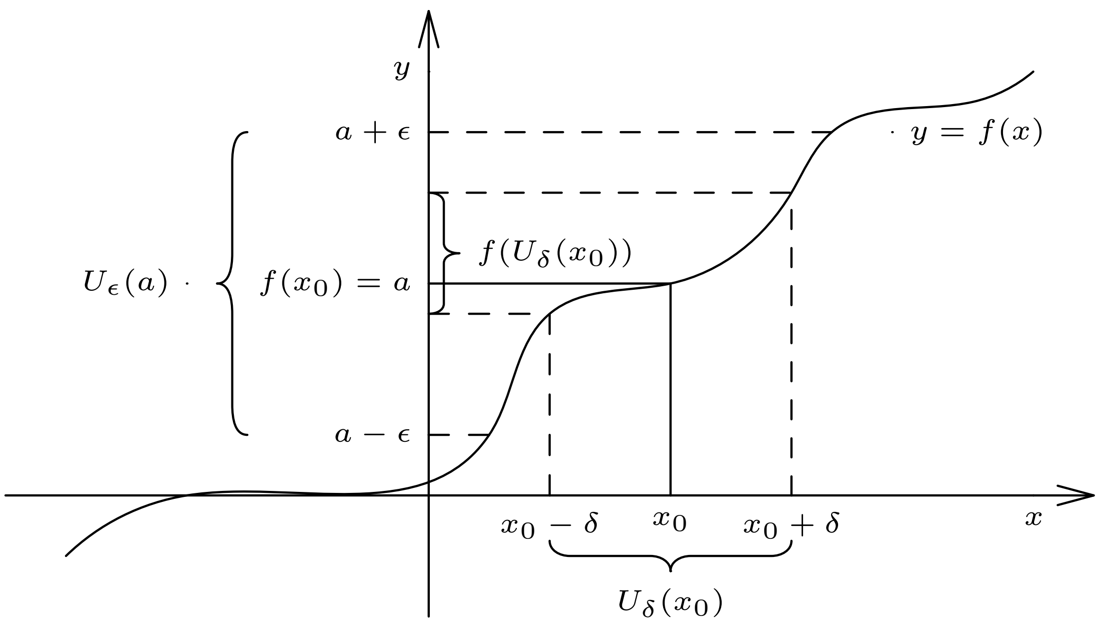
$$U'_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \epsilon\} = U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen x_0 aidossa ympäristössä $U'(x_0)$. Funktiolla f on *raja-arvo* a pisteessä x_0, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta = (\delta_\epsilon) > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

Määritelmän voi kirjoittaa yhtäpitävästi muotoon

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad f(U'_\delta(x_0)) \subset U_\epsilon(a).$$



Kuva 2.2: **Raja-arvo; luvun $\delta = (\delta_\epsilon) > 0$ valinta**.

Kun f:llä on x_0:ssa raja-arvo a merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Raja-arvoehdon todistamiseksi pyritään epäyhtälöstä $|f(x) - a| < \epsilon$ johtamaan ehto $\delta = \delta_\epsilon$:lle.

Esimerkki 2.4.1. a) Jos $f(x) = c$ (vakio) $\forall x \in \mathbb{R}$, niin $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Nimittäin $\forall \epsilon > 0$: $f(U'_\delta(x_0)) = \{c\} \subset U_\epsilon(c)$, olipa $\delta > 0$ valittu miten tahansa.

b) $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Todistetaan, että $\lim_{x\to x_0} f(x) = ax_0 + b$. Nyt

$$|f(x) - (ax_0 + b)| = |ax - ax_0| = |a| \cdot |x - x_0|,$$

joten valitsemalla $\delta = \epsilon/|a|\,(> 0)$ saadaan $\forall \epsilon > 0$:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - (ax_0 + b)| < |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon;$$

c) Funktio $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ei ole määritelty pisteessä $x = 0$. Kuitenkin $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin

$$|f(x) - 0| = |x^2 \sin(1/x)| = x^2 \cdot |\sin(1/x)| \le x^2 \cdot 1 < \epsilon,$$

kun $|x| < \sqrt{\epsilon}$. Siis voidaan valita $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

Jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Lause 2.4.2. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, niin $a = b$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Oletuksen nojalla $\exists \delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{ja} \quad |f(x) - b| < \epsilon,$$

kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.4) nojalla

$$|b - a| = |(f(x) - a) - (f(x) - b)| \le |f(x) - a| + |f(x) - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, on oltava $|b - a| = 0$ eli $b = a$. □

Funktioille voidaan määritellä myös toispuoleiset raja-arvot. Funktiolla f on *oikeanpuoleinen raja-arvo* a pisteessä x_0, merk. $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$, jos

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon.$$

Vastaavasti määritellään *vasemmanpuoleinen raja-arvo:* $\lim_{x\to x_0-} f(x) = a$, jos

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad 0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon.$$

Määritelmistä seuraa välittömästi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = a = \lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Raja-arvoja määritettäessä seuraavat laskusäännöt ovat hyödyllisiä.

Lause 2.4.3. Olkoot funktioilla f ja g raja-arvot pisteessä x_0. Tällöin:

i) $\lim_{x\to x_0}(cf(x) + b) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) + b$ (tässä $c, b \in \mathbb{R}$);

ii) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$;

iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x))$;

iv) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, kun $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Todistus. Todistukset voidaan perustaa suoraan määritelmään. □

Raja-arvon määritelmä voidaan laajentaa myös tapauksiin $x_0 = \pm\infty$ ja $a = \pm\infty$. Esimerkiksi:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a, \text{ jos } \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0 \quad \text{s.e.} \quad x > M \implies |f(x) - a| < \epsilon;$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \text{ jos } \forall M > 0\ \exists\delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

Vastaavasti voidaan määritellä toispuoleiset raja-arvot:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty, \text{ jos } \forall M > 0\ \exists\delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies f(x) > M;$$
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty, \text{ jos } \forall M > 0\ \exists\delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad 0 < x_0 - x < \delta \implies f(x) < -M;$$

jne., kuten myös raja-arvot $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Esimerkki 2.4.4.

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)^3 = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty, \quad f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} \to \begin{cases} 0, & \text{kun } x \to 0+; \\ 1, & \text{kun } x \to 0-. \end{cases}$$

Huom! Lauseen 2.4.3 tulokset (laskusäännöt) ovat voimassa myös toispuoleisille ja epäolennaisille raja-arvoille. Tällöin raja-arvolaskuissa on huomioitava symboleita ∞ ja $-\infty$ koskevat rajoitukset niillä laskettaessa.

2.5 Jatkuvuus

Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 eräässä ympäristössä $U(x_0)$. Tällöin f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jos f ei ole jatkuva pisteessä x_0 sanotaan, että f on *epäjatkuva pisteessä* x_0. Tällöin f:llä ei ole raja-arvoa pisteesä x_0 tai ko. raja-arvo on olemassa, mutta erisuuri kuin $f(x_0)$.

Raja-arvoa koskevasta Lauseesta 2.4.3 seuraa välittömästi

Lause 2.5.1. Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin myös funktiot $c \cdot f + b$ $(c, b \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f \cdot g$ ja f/g (kun $g(x_0) \neq 0$) ovat jatkuvia pisteessä x_0.

Voidaan määritellä myös funktion toispuoleinen jatkuvuus. Funktio f on *oikealta jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

ja *vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Vastaavasta raja-arvoa koskevasta tuloksesta seuraa:

$$f \text{ on jatkuva } x_0\text{:ssä} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ on sekä oikealta että vasemmalta jatkuva } x_0\text{:ssä.}$$

Jatkuvuuden ja raja-arvon määritelmät yhdistämällä saadaan f:n jatkuvuudelle pisteessä x_0 seuraava karakterisaatio:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

eli $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.e. $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\epsilon(f(x_0))$.

Esimerkki 2.5.2. a) Itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ on jatkuva $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Funktio $f(x) = (2x + |x|)/(x - 3)$ on jatkuva pisteissä $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ eli määrittelyjoukossaan.

Funktiota f sanotaan *jatkuvaksi avoimella välillä* $]a, b[$, jos f on jatkuva välin $]a, b[$ jokaisessa pisteessä. Vastaavasti f on *jatkuva suljetulla välillä* $[a, b]$, jos se on jatkuva välillä $]a, b[$ ja lisäksi toispuoleisesti jatkuva välin $[a, b]$ päätepisteissä.

Esimerkki 2.5.3. Polynomit $P(x)$, $\sin x$, $\cos x$ ja e^x ovat jatkuvia $\mathbb{R}$:ssä, $\ln x$ on jatkuva $\mathbb{R}_+$:ssa. Rationaalifunktiot $P(x)/Q(x)$ ovat jatkuvia väleillä/pisteissä, joissa $Q(x) \neq 0$. Samoin $\tan x$ on jatkuva väleillä/pisteissä, joissa $x \neq \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ja $\cot x$ on jatkuva väleillä/pisteissä, joissa $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Lause 2.5.4. Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja g on jatkuva pisteessä $y_0 = f(x_0)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä x_0:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Funktion g jatkuvuuden nojalla $\exists \delta' > 0$ s.e.

$$|y - y_0| < \delta' \quad \Longrightarrow \quad |g(y) - g(y_0)| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Toisaalta f:n jatkuvuuden nojalla lukua $\delta' > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \delta'. \tag{2.2}$$

Tässä $f(x_0) = y_0$, joten voimme soveltaa implikaatiota (2.1) arvolla $y = f(x)$. Siten yhdistämällä (2.2) ja (2.1) saadaan väite: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.e.

$$|x - x_0| < \delta \quad \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} \quad |f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=y_0}| < \delta \quad \overset{(2.1)}{\Longrightarrow} \quad |g(f(x)) - \underbrace{g(y_0)}_{=g(f(x_0))}| < \epsilon. \qquad \square$$

Seuraava jatkuvia funktioita koskeva tulos on tärkeä.

Lause 2.5.5. (Bolzanon lause) Jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot (ts. $f(a) \cdot f(b) < 0$), niin on olemassa ainakin yksi piste ξ, $a < \xi < b$, siten että $f(\xi) = 0$.

Todistus. Geometrisesti ilmeinen; yksityiskohdat käsitellään luennoilla (todistus perustuu täydellisyysaksiomaan). □

Bolzanon lauseesta voidaan helposti johtaa seuraava jatkuvan funktion arvoja koskeva tulos.

Lause 2.5.6. Jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja luku c on arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, niin on olemassa ainakin yksi piste ξ, $a < \xi < b$, s.e. $f(\xi) = c$.

Todistus. Sovelletaan Bolzanon lausetta funktioon $g(x) = f(x) - c$. Yksityiskohdat jätetään harj. tehtäväksi. □

Lause 2.5.7. Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu. Lisäksi f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä $[a, b]$, ts. $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ siten, että

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Todistus. Tämäkin tulos voidaan todistaa "supremum-tarkasteluilla", ts. reaalilukujen täydellisyysaksiomasta käsin (yksityiskohdat käsitellään luennoilla). □

Esimerkki 2.5.8. Funktiolla $f(x) = 1/(\sin^2 x + 2)$ on suurin arvo välillä $[-1, 1]$. Nimittäin $\sin x$ ja siten myös $\sin^2 x + 2$ ja edelleen $f(x)$ on jatkuva välillä $[-1, 1]$, koska nimittäjällä ei ole nollakohtia. Lause 2.5.7 $\Longrightarrow$ väite. Itse asiassa: $\sin^2 x + 2 \geq 2$ eli $f(x) \leq 1/2$ ja $f(0) = 1/2$.

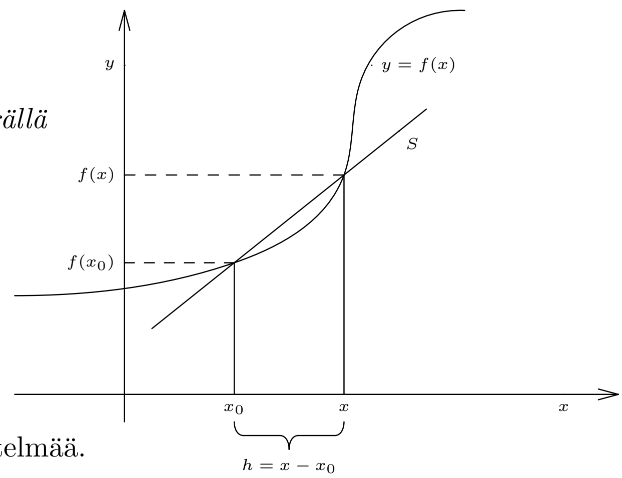
2.6 Funktion derivaatta

Derivaatan määritelmä perustuu raja-arvon käsitteeseen. Olkoon funktio f määritelty pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ eräässä ympäristössä. Tällöin f on *derivoituva pisteessä* x_0, jos *erotusosamäärällä*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad h \neq 0$$

on äärellinen raja-arvo, kun $h \to 0$. Tätä raja-arvoa sanotaan f:n *derivaataksi pisteessä* x_0 ja merk.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Oheinen kuva havainnollistaa derivaatan määritelmää. Kuviossa suoran S kulmakerroin on $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Kun $x \to x_0$ suoran kulmakerroin lähestyy pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretyn tangentin kulmakerrointa, mikä antaa derivaatalle geometrisen tulkinnan:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Esimerkki 2.6.1. $f(x) = x^2$. Tällöin $\forall h \neq 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h,$$

joten $f'(x_0) = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$.

Funktion $y = f(x)$ derivaatalle käytetään myös merkintöjä $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$, $Df(x)$, $y'(x)$. Jos funktio f on derivoituva esim. välin $]a, b[$ jokaisessa pisteessä, derivaatta määrittelee uuden funktion $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$. Tätä derivaattafunktiota f' merk. usein myös $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, Df, y'.

Derivaatan määritelmästä nähdään, että jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin kaikilla $h \neq 0$:

$$\lim_{h\to 0} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = \lim_{h\to 0} |h| \cdot \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h} \right| = 0 \cdot |f'(x_0)| = 0.$$

Siten, jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin se on myös jatkuva pisteessä x_0. Käänteinen väite ei päde, ts. funktion jatkuvuus ei takaa sen derivoituvuutta.

Esimerkki 2.6.2. Itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ on jatkuva $\forall x \in \mathbb{R}$. Kun $x_0 = 0$, saadaan

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & \text{kun } h < 0; \\ 1, & \text{kun } h > 0. \end{cases}$$

Siten erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa pisteessä $x_0 = 0$.

Esimerkin tapauksessa funktiolla $f(x) = |x|$ on erisuuret toispuoleiset derivaatat pisteessä $x_0 = 0$. Yleisesti funktion f *oikeanpuoleinen derivaatta* pisteessä x_0 määritellään erotusosamäärän oikeanpuoleisena raja-arvona:

$$f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vastaavasti f:n *vasemmanpuoleinen derivaatta* pisteessä x_0 on raja-arvo

$$f'(x_0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Siten f on derivoituva pisteessä x_0, jos ja vain jos sillä on olemassa toispuoleiset derivaatat pisteessä x_0 ja ne ovat keskenään yhtäsuuret. Kuten jatkuvuuden yhteydessä voidaan määritellä funktion derivoituvuus avoimella ja suljetulla välillä.

Derivoimissääntöjä: Seuraavat derivoimissäännöt voidaan johtaa suoraan määritelmästä.

Lause 2.6.3. Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä x. Tällöin:

i) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$ vakio;

ii) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

iv) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x) \neq 0$.

Lauseen 2.6.3 kohdat i) ja ii) merkitsevät, että derivointi on *lineaarinen operaatio*; ts. $D(af + bg) = a \cdot Df + b \cdot Dg$. Yhdistetyn funktion derivoituvuutta koskee seuraava tulos.

Lause 2.6.4. Jos f on derivoituva pisteessä x_0 ja g on derivoituva pisteessä y_0, missä $y_0 = f(x_0)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$D((g \circ f)(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \text{(Ketjusääntö)}.$$

Todistus. Merk. $u(y, y_0) = (g(y) - g(y_0))/(y - y_0) - g'(y_0)$, jolloin $u(y, y_0) \to 0$ kun $y \to y_0$. Kun $y = f(x)$, saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to 0}(g'(y_0) + \underbrace{u(y, y_0)}_{\to 0,\ \text{kun}\ y \to y_0}) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0),\end{aligned}$$

sillä, kun $x \to x_0$, niin myös $y = f(x) \to f(x_0) = y_0$, koska f derivoituvana on myös jatkuva pisteessä x_0. □

Seuraava tulos liittyy käänteisfunktion derivoituvuuteen. Olkoon f määritelty pisteen x_0 eräässä ympäristössä ja oletetaan, että f:llä on käänteisfunktio f^{-1}, joka on määritelty eräässä pisteen $y_0 = f(x_0)$ ympäristössä.

Lause 2.6.5. Olkoot f ja f^{-1} kuten yllä ja oletetaan, että f^{-1} on jatkuva pisteessä $y_0 = f(x_0)$ ja että f:llä on pisteessä x_0 derivaatta $f'(x_0) \neq 0$. Tällöin f^{-1} on derivoituva pisteessä y_0 ja

$$D(f^{-1}(y_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Todistus. Merk. $y = f(x)$ ja $y_0 = f(x_0)$. Tällöin

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

sillä f^{-1}:n jatkuvuuden nojalla pisteessä y_0 pätee $y \to y_0 \implies x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. □

Huom. 1. Jos f^{-1}:n derivoituvuus pisteessä y_0 tiedetään jo etukäteen, saadaan käänteisfunktion derivoimissääntö suoraan Lauseen 2.6.4 avulla: Määritelmän mukaan

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

joten derivointi puolittain antaa

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$$

eli

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad f'(x_0) \neq 0.$$

Huom. 2. Käänteisfunktion f^{-1} jatkuvuutta pisteessä $y_0 = f(x_0)$ ei apriori tarvitse olettaa; se seuraa myös suoraan oletuksesta $f'(x_0) \neq 0$.

2.7 Tavallisimpien funktioiden derivaattoja

Trigonometristen funktioiden derivaatat:

$$D\sin x = \cos x, \quad D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$
$$D\cos x = -\sin x, \quad D\cot x = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Eksponenttifunktio: $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \underbrace{=}_{\text{vaatii toki perustelun!}} e^x \cdot 1 = e^x.$$

Siis $De^x = e^x$. Tässä kantaluku e on ns. *Neperin luku*, joka voidaan määritellä raja-arvona

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Itse asiassa

$$e = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Kun kantalukuna on $a > 0$, saadaan $a^x = e^{x\ln a}$, joten

$$Da^x = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a,$$

missä käytettiin ketjusääntöä (Lause 2.6.4).

Logaritmifunktio: $\ln x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. $\ln x$ on e^x:n käänteisfunktio. Lause 2.6.5 $\Longrightarrow$

$$D\ln x = \frac{1}{(De^y)_{y=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Logaritmifunkio kantalukun $a > 0$ $(a \neq 1)$:

$$\log_a x = \log_a e \cdot \ln x, \quad D(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}.$$

Yhdistetyn funktion derivointisääntö antaa edelleen:

$$D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad D(\log_a|x|) = \frac{\log_a e}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Yleinen potenssifunktio: x^a, $a \in \mathbb{R}$.

$$x^a = e^{a\ln x}, \quad Dx^a = e^{a\ln x} \cdot (a\frac{1}{x}) = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Esimerkki 2.7.1. a) $f(x) = x^x$, $x > 0$. Kirjoitetaan $x^x = e^{x\ln x}$. Tällöin

$$Df(x) = D(e^{x\ln x}) = e^{x\ln x} \cdot D(x\ln x) = x^x(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$$

b) $D(\ln(\ln(x^2+1))) = \frac{1}{\ln(x^2+1)} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x.$

Arkusfunktiot: Trigonometriset funktiot eivät ole jaksollisina kääntyviä koko $\mathbb{R}$:ssä. Sopivilla $\mathbb{R}$:n osaväleillä käänteisfunktiot saadaan kuitenkin määriteltyä ja niitä kutsutaan *arkusfunktioiksi.*

1) $\overline{\text{arc}}\text{sin}x$ (l. $\arcsin x$:n päähaara)

$$y = \overline{\text{arc}}\text{sin}x \iff x = \sin y \text{ ja } y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ts. kyseessä on $\sin y$:n käänteisfunktio välillä $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Derivaatta saadaan käänteisfunktion derivointisäännöllä:

$$y'(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Siis $D(\overline{\text{arc}}\text{sin}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $\overline{\text{arc}}\text{cos}x$ (l. $\arccos x$:n päähaara)

$$y = \overline{\text{arc}}\text{cos}x \iff x = \cos y \text{ ja } y \in [0, \pi].$$

Derivaatta saadaan käänteisfunktion derivointisäännöllä:

$$D(\overline{\text{arc}}\text{cos}x) = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-1\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vastaavasti saadaan:

3) $\overline{\text{arc}}\text{tan}x$ (l. $\arctan x$:n päähaara)

$$y = \overline{\text{arc}}\text{tan}x \iff x = \tan y \text{ ja } y \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad D(\overline{\text{arc}}\text{tan}x) = \frac{1}{1+x^2};$$

4) $\overline{\text{arc}}\text{cot}x$ (l. $\text{arccot}\, x$:n päähaara)

$$y = \overline{\text{arc}}\text{cot}x \iff x = \cot y \text{ ja } y \in]0, \pi[, \quad D(\overline{\text{arc}}\text{cot}x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.8 Derivaatan ominaisuuksia

Derivaatta kertoo funktion lokaalista käyttäytymisestä.

Lause 2.8.1. Olkoon f derivoituva pisteessä x_0. Tällöin:

i) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0), & \text{kun } x_0 - \epsilon < x < x_0; \\ f(x) > f(x_0), & \text{kun } x_0 < x < x_0 + \epsilon; \end{cases}$$

ii) Jos $f'(x_0) < 0$, niin on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0), & \text{kun } x_0 - \epsilon < x < x_0; \\ f(x) < f(x_0), & \text{kun } x_0 < x < x_0 + \epsilon; \end{cases}$$

iii) Jos f:llä on lokaali minimi tai maksimi pisteessä x_0, niin $f'(x_0) = 0$.

Todistus. i) Koska $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ja $f'(x_0) > 0$ on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \qquad \text{kun } 0 < |x - x_0| < \epsilon.$$

Tämä antaa kohdan i). Vastaavasti todistetaan kohta ii). Kohta iii) seuraa kontrapositiolla kohdista i) ja ii). □

Lause 2.8.2. (Rollen lause) Oletetaan, että funktio f on

i) jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$;

ii) derivoituva avoimella välillä $]a, b[$;

iii) $f(a) = f(b)$.

Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $\xi \in]a, b[$ siten, että $f'(\xi) = 0$.

Todistus. Jos f on vakio välillä $[a, b]$, on $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$, ja väite on selvästi voimassa. Muussa tapauksessa f saa välillä $]a, b[$ arvoja, jotka ovat esim. suurempia (pienempiä) kuin $f(a) = f(b)$. Tällöin Lauseen 2.5.7 nojalla f jatkuvana funktiona saa maksimin (minimin) pisteessä $\xi \in [a, b]$ ja nyt välttämättä $\xi \neq a, b$; ts. $a < \xi < b$. Nyt Lause 2.8.1, kohta iii):n mukaan $f'(\xi) = 0$. □

Lause 2.8.3. (Väliarvolause) Oletetaan, että f on

i) jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$;

ii) derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.

Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $\xi \in]a, b[$ s.e.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Todistus. Sovelletaan Rollen Lausetta funktioon

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tällöin $h'(\xi) = 0$ jollekin $\xi \in]a, b[$ ja väite seuraa derivoimalla $h(x)$:n lauseke. (Yksityiskohdat: Harj. teht.) □

Väliarvolause on tärkeä väline matemaattisessa analyysissä. Sillä on useita tärkeitä sovelluksia ja seurauksia.

Lause 2.8.4. (Integraaalilaskennan peruslause). Oletetaan, että

i) f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$;

ii) f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$;

iii) $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Tällöin f on vakio koko välillä $[a, b]$.

Todistus. Olkoon $x \in]a, b[$ mielivaltainen. Soveltamalla väliarvolausetta välillä $[a, x]$ saadaan

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a), \quad \xi \in]a, x[.$$

Oletuksen iii) mukaan $f'(\xi) = 0$, joten $f(x) = f(a)$. $\square$

Raja-arvolaskuissa seuraava tulos on hyödyllinen.

Lause 2.8.5. (l'Hospitalin sääntö) Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia pisteen a jossakin ympäristössä $U_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$. Jos $f(a) = g(a) = 0$, niin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\in \overline{\mathbb{R}}).$$

Todistus. Koska $f(a) = g(a) = 0$, saadaan

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad \square$$

Huom.! Derivaatan jatkuvuudesta voidaan luopua soveltamalla väliarvolausetta.

Esimerkki 2.8.6. a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overbrace{=}^{\text{l'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{D(e^x-1)}{Dx} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1;$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overbrace{=}^{\text{l'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1;$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \overbrace{=}^{\text{l'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \overbrace{=}^{b)} 2 \cdot 1 = 2.$

Väliarvolause voidaan yleistää seuraavaan muotoon.

Lause 2.8.7. (Yleistetty väliarvolause) Oletetaan, että f ja g ovat

i) jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$;

ii) derivoituvia avoimella välillä $]a, b[$;

iii) $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $\xi \in]a, b[$ s.e.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Todistus. Harj. teht. □

Yleistetyn väliarvolauseen avulla saadaan l'Hospitalin säännölle seuraava yleisempi versio.

Lause 2.8.8. (l'Hospitalin sääntö) Olkoot f ja g jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia välillä $]a, b[$, ja olkoot $f(a) = g(a) = 0$ sekä $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Tällöin

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Todistus. Olkoon $x \in]a, b[$ mielivaltainen. Sovelletaan Lausetta 2.8.7 välillä $[a, x]$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in]a, x[.$$

Kun $x \to a+$, niin myös $\xi \to a+$, mistä väite seuraa. Tässä $g(x) \neq g(a) = 0$, koska $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a, b[$. □

Lause 2.8.9. Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva pisteessä x_0 ja lisäksi derivoituva pisteen x_0 jossakin aidossa ympäristössä $0 < |x - x_0| < \delta$ $(\delta > 0)$. Jos derivaatan oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to x_0+} f'(x)$ on olemassa, niin $f(x)$:llä on oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 ja

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f'(x).$$

Todistus. Sovelletaan väliarvolausetta; yksityiskohdat esitetään luennoilla. □

Huom. Vastaava tulos pätee myös *vasemmanpuoleiselle* raja-arvolle/derivaatalle ja siten erityisesti: jos $f(x)$ on jatkuva pisteessä x_0, niin

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) \quad \Rightarrow \quad \exists\, f'(x_0) \text{ ja } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Tällöin f on *jatkuvasti derivoituva* pisteessä x_0. Huomaa, että f:n jatkuvuutta koskevasta oletuksesta Lauseessa 2.8.9 ei voida luopua.

2.9 Funktion ääriarvot

Funktiolla f on lokaali maksimi (vast. minimi) pisteessä x_0, jos $f(x_0)$ on f:n suurin (vast. pienin) arvo jossakin x_0:n ympäristössä $U_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Lauseen 2.8.1, kohdan iii) mukaan, jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin välttämätön ehto f:n lokaalille ääriarvolle on, että $f'(x_0) = 0$. Käänteinen väite ei ole voimassa.

Esimerkki 2.9.1. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, joten $f'(0) = 0$, mutta 0 ei ole f:n ääriarvokohta.

Lause 2.9.2. Olkoon f derivoituva (rajoitetulla tai rajoittamattomalla) välillä I ($I \subset \mathbb{R}$). Jos $f'(x) \geq 0$ (vastaavasti $f'(x) > 0$) kaikissa I:n sisäpisteissä, niin f on kasvava (vastaavasti aidosti kasvava) välillä I.

Todistus. Olkoot $x, y \in I$ ja $x < y$. Väliarvolauseen nojalla

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x), \quad x < \xi < y.$$

Siten $f'(\xi) \geq 0 \Longrightarrow f(y) \geq f(x)$ ja vastaavasti $f'(\xi) > 0 \Longrightarrow f(y) > f(x)$. □

Vastaavasti:

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ vähenevä välillä } I; \\ f'(x) < 0 \ \forall x \in I \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ aidosti vähenevä välillä } I. \end{aligned}$$

Lauseesta 2.9.2 saadaan f:lle seuraava *ääriarvotesti.*

Lause 2.9.3. Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja derivoituva pisteen x_0 jossakin aidossa ympäristössä $U_\delta(x_0)$ ja $f'(x)$ vaihtaa merkkiään pisteessä x_0, niin f:llä on lokaali ääriarvo pisteessä x_0: "$+ \to -$"$\Longrightarrow$ lokaali max, "$- \to +$"$\Longrightarrow$ lokaali min.

Todistus. Lause 2.9.2 sovellettuna väleillä $]x_0 - \delta, x_0]$ ja $[x_0, x_0 + \delta[$. □

Käänteinen tulos ei taaskaan ole voimassa. Itse asiassa f:n ja f':n käyttäytyminen lokaalin ääriarvokohdan x_0 ympäristössä saattaa olla varsin epäsäännöllistä.

Myös funktion f toista derivaattaa f'', joka liittyy käyrän kuperuuteen, voidaan käyttää apuna lokaalien ääriarvojen määrityksessä. Käyrä $y = f(x)$ on välillä I *kupera alaspäin* (vast. *kupera ylöspäin*), jos käyrä ei missään välin I pisteessä ole minkään tangenttinsa alapuolella (yläpuolella).

Lause 2.9.4. Jos f:n derivaatta f' on välillä I aidosti kasvava (vast. vähenevä), niin käyrä $y = f(x)$ on kupera alaspäin (vast. kupera ylöspäin).

Todistus. Pisteessä $x_1 \in I$ olevan tangentin yhtälö on

$$y = t(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

Olkoon $x_2 \in I$ ($x_2 \neq x_1$).

Väliarvolauseen nojalla

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

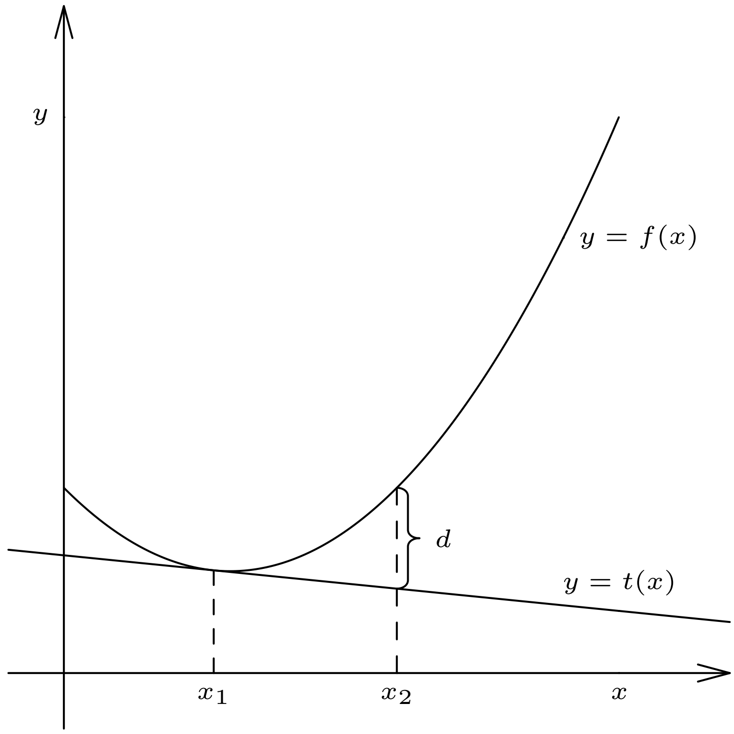
missä ξ on pisteiden x_1 ja x_2 välissä. Nyt f' aidosti kasvava $\Longrightarrow$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1),$$

eli

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) = t(x_2).$$

Siis $y = f(x)$ on kupera alaspäin. Vastaavasti todistetaan väitteen toinen osa. □



Oheinen kuva havainnollistaa Lauseen 2.9.4 tulosta ja sen todistusta.

Yhdistämällä Lauseet 2.9.2 ja 2.9.4 saadaan

Seuraus 2.9.5. Jos $f''(x) > 0$ (vast. $f''(x) < 0$) $\forall x \in I$, niin käyrä $y = f(x)$ on kupera alaspäin (vast. ylöspäin).

Toisen derivaatan avulla saadaan seuraava ääriarvotesti.

Lause 2.9.6. Olkoon f derivoituva pisteen x_0 jossakin ympäristössä ja kahdesti derivoituva pisteessä x_0. Tällöin:

i) Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, niin f:llä on lokaali maksimi x_0:ssa;

ii) Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, niin f:llä on lokaali minimi x_0:ssa.

Todistus. Lause 2.8.1 $\Longrightarrow$ $f'(x)$ vaihtaa merkkiään pisteessä x_0, joten väite seuraa Lauseesta 2.9.3. $\square$

Huom. Pistettä x_0, jossa $f''(x_0) = 0$ ja jossa $f''(x)$ vaihtaa merkiään sanotaan *f:n käännepisteeksi.*

Yhteenvetona voidaan todeta, että suljetulla välillä jatkuvalla funktiolla f on suurin ja pienin arvo (Lause 2.5.7). Se saavutetaan joko f:n lokaalissa ääriarvokohdassa tai välin päätepisteessä. Lokaaleja ääriarvokohtia välillä I voivat olla:

(1) pisteet, joissa $f'(x_0) = 0$;

(2) pisteet x_0, joissa f ei ole derivoituva;

(3) pisteet x_0, joissa f on epäjatkuva.

2.10 Implisiitti- ja parametrimuotoisen funktion derivointi

Implisiittifunktion derivointi: Jos yhtälö $F(x, y) = 0$ määrittelee jonkin funktion $y = f(x)$, voidaan f:n derivaatta $f'(x)$ usein saada derivoimalla suoraan lauseketta $F(x, f(x))$.

Esimerkki 2.10.1. a) $F(x, y) = y^2 - x = 0$. Merkitään $y = y(x)$, jolloin derivointi puolittain antaa

$$2y(x) \cdot y'(x) - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{2y}.$$

Tässä $y^2 = x$, joten $y = \pm\sqrt{x}$ ja sijoitus antaa $y'(x) = \frac{1}{\pm 2\sqrt{x}}$.

b) $F(x, y) = y - e^{xy} = 0$. Määrätään käyrän $y = e^{xy}$ pisteeseen $(0, 1)$ piirretyn tangentin yhtälö. Nyt

$$y'(x) = e^{xy(x)}(1 \cdot y(x) + xy'(x)) = e^{xy(x)}(y(x) + xy'(x)).$$

Siten $y(0) = 1 \Longrightarrow y'(0) = e^0(1 + 0 \cdot y'(0)) = 1$. Tangentin yhtälö on:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \quad \Longleftrightarrow \quad y = x + 1.$$

Kuten esimerkit osoittavat derivaatan lausekkeeseen jää $F(x, y)$:n derivoinnin jälkeen y, jonka arvo on erikseen selvitettävä.

Parametrimuotoisen funktion derivointi: Olkoot $x = x(t)$ ja $y = y(t)$. Jos funktiolla $x(t)$ on käänteisfunktio $\phi = x^{-1}$, $\phi(x) = t$ jollakin sopivalla parametrin t sisältävällä välillä, niin pari $(x(t), y(t))$ määrittelee funktion $y = f(x)$:

$$y(t) = y(\phi(x)) = \underbrace{(y \circ \phi)}_{=f}(x).$$

Johdetaan lauseke y:n derivaatalle $y' = f'(x)$. Yhdistetyn funktion ja käänteisfunktion derivointisääntöjen mukaan

$$y'(x) = f'(x) = y'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = y'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)}.$$

Siis $y'(x) = f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Yhtäpitävästi:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

(Mikä osoittaa, että differentiaaleilla voidaan laskea kuten luvuilla.)

Tulos osoittaa, että funktion $y = f(x)$ derivaatta voidaan laskea selvittämättä itse funktion $f(x)$ lauseketta!

Esimerkki 2.10.2. Olkoot $x(t) = t^3 - t$ ja $y(t) = 2 - t^2$. Määritetään käyrän $(x(t), y(t))$ pisteeseen $(x(2), y(2))$ piirretyn tangentin yhtälö. Nyt

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1; \\ y'(t) = -2t, \end{cases}$$

joten

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2} = \frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{-4}{11}$$

on tangentin kulmakerroin ko. pisteessä. Lisäksi $x(2) = 6$ ja $y(2) = -2$, ja tangentin yhtälöksi saadaan:

$$y - (-2) = -\frac{4}{11}(x - 6) \iff 11y + 4x = 2.$$

2.11 Sovelluksia

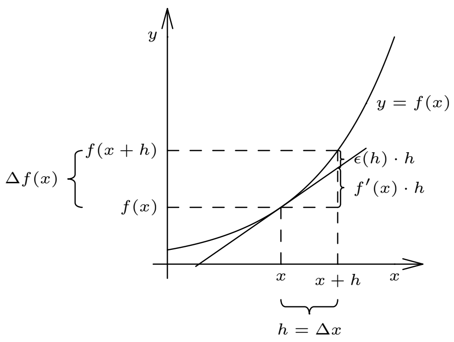
Differentiaalikehitelmä: Funktion derivoituvuus pisteessä x voidaan esittää yhtäpitävästi ns. *differentiaalikehitelmän* avulla:

$$f(x + h) - f(x) = a \cdot h + h \cdot \epsilon(h), \tag{2.3}$$

missä a on vakio, joka ei riipu h:sta, ja $\epsilon(h)$ on jossakin pisteen $h = 0$ ympäristössä määritelty funktio, joka toteuttaa ehdot: $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$. Nimittäin jakamalla (2.3) puolittain h saadaan

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a + \epsilon(h) \to a, \text{ kun } h \to 0,$$

joten f on derivoituva pisteessä x ja $f'(x) = a$. Kääntäen f:n derivoituvuus pisteessä $x \Longrightarrow$ (2.3): vrt. Lauseen 2.6.4 todistus.



Differentiaalikehitelmä (2.3) osoittaa, että funktiota f voidaan approksimoida pisteen x lähellä lineaarisella kuvauksella (f:n pisteessä x olevalla tangentilla).

Lisäksi approksimaatio paranee, kun $h = \Delta x \to 0$. Termiä $f'(x)h$ kutsutaan f:n *differentiaaliksi* pisteessä x (lisäyksen h suhteen) ja merkitään $\mathrm{d}f$. Se kirjoitetaan usein muodossa $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$.

Ko. approksimaatiota voidaan käyttää arvioitaessa esim. mittausvirheiden vaikutusta. Olkoon Δx argumentin x virhe. Tällöin funktion f:n *absoluuttinen virhe* on $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$ ja *suhteellinen virhe* on $\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \approx \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x$.

Esimerkki 2.11.1. Jos $\Delta r = 0.1$ cm on ympyrän säteen $r = 10$ cm mittausvirhe, niin alan $A = \pi r^2$ virhe $\Delta A = 2\pi r\Delta r = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.1\text{cm} \approx 6.3\text{cm}^2$ ja suhteellinen virhe $\frac{\Delta A}{A} = \frac{2\pi r\cdot\Delta r}{\pi r^2} = \frac{2\Delta r}{r} = 2\frac{0.1}{10} = 0.02$.

Väliarvolause mahdollistaa virhearviointien tekemisen myös väleillä, jos käytettävissä on arvio funktion derivaatalle. Nimittäin, jos f täyttää väliarvolauseen ehdot, niin

$$\Delta f(x) = f'(\xi) \cdot \Delta x, \quad \xi \in]a, b[,$$

missä $\Delta f(x) = f(b) - f(a)$ ja $\Delta x = b - a$. Siten

$$|f'(x)| < M \ \forall x \in]a, b[\quad \Longrightarrow \quad |\Delta f(x)| \leq M \cdot |\Delta x|.$$

Esimerkki 2.11.2. Määrätään virhe, joka syntyy laskettaessa funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ arvo pisteessä $x = \pi$ $(= 3.14159\ldots)$, kun käytetään likiarvoa $\pi \approx 3.14$. Ratkaisu: Nyt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Välillä $3.14 < x < 3.142$, johon π kuuluu, saadaan derivaatalle arvio

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{(3.14)^2} \leq 0,102.$$

Siten $|\Delta f| \leq 0,102 \cdot (\pi - 3.14) < 0,102 \cdot 0,002$ $(< 0.3 \cdot 10^{-3})$.

Kiintopisteiterointi:

Lause 2.11.3. Olkoon $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jatkuva ja derivoituva. Tällöin:

i) $\exists \xi \in [0, 1]$ siten, että $f(\xi) = \xi$.

Jos lisäksi $|f'(x)| \leq K < 1 \ \forall x \in]0, 1[$, niin

ii) f:n kiintopiste ξ on yksikäsitteisesti määrätty ja

iii) jos $x_0 \in [0, 1]$ ja määritellään jono $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, niin

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

Todistus. i) Merkitään $h(x) = f(x) - x$. Tällöin $h(x)$ on jatkuva $\forall x \in [0, 1]$. Jos $f(0) = 0$ tai $f(1) = 1$, niin kohdan i) väite pätee selvästi. Muussa tapauksessa $f(0) > 0$ ja $f(1) < 1$. Yhtäpitävästi:

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - 0 > 0; \\ h(1) = f(1) - 1 < 0. \end{cases}$$

Bolzanon lause $\Longrightarrow \exists \xi \in]0, 1[$ siten, että $h(\xi) = 0$ eli $f(\xi) - \xi = 0 \Longleftrightarrow f(\xi) = \xi$. Siis joka tapauksessa $\exists \xi \in [0, 1]$ sitten, että $f(\xi) = \xi$.

ii) Tehdään vastaoletus: $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_1 < \xi_2$, siten, että $f(\xi_1) = \xi_1$ ja $f(\xi_2) = \xi_2$. Väliarvolauseesta saadaan nyt: $\exists \eta$, $\xi_1 < \eta < \xi_2$ siten, että

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = 1.$$

Ristiriita, koska oletuksen mukaan $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in]0, 1[$. Siis ξ on yksikäsitteisesti määrätty.

iii) Jos $x_n = \xi$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, niin väite on selvä. Jos taas $x_n \neq \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$, niin väliarvolauseesta seuraa $\exists \eta_n$ (x_{n-1}:n ja ξ:n välissä) siten, että:

$$|x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - f(\xi)| = |f'(\eta_n)(x_{n-1} - \xi)| = |f'(\eta_n)| \cdot |x_{n-1} - \xi| \leq K|x_{n-1} - \xi|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Siten

$$|x_n - \xi| \le K|x_{n-1} - \xi| \le K \cdot K|x_{n-2} - \xi| \le K^3|x_{n-3} - \xi| \le K^n|x_0 - \xi|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tässä $K < 1$, joten $K^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Niinpä

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| \le \lim_{n\to\infty} K^n|x_0 - \xi| = 0.$$

Ts. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. □

Huom! Vastaava tulos pätee myös, kun $f : [a, b] \to [a, b]$.

Lause 2.11.4. Olkoon f jatkuvasti derivoituva välillä $[a, b]$ ja olkoon $\xi \in]a, b[$ piste, jossa

$$f(\xi) = \xi \quad \text{and} \quad |f'(\xi)| < 1.$$

Tällöin on olemassa väli $[c, d] \subset]a, b[$ siten, että $\xi \in]c, d[$ ja jono $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ suppenee kohti pistettä ξ, ts. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, kun $x_0 \in [c, d]$.

Todistus. Koska $|f'(\xi)| < 1$ ja f' on jatkuva on olemassa väli $[c, d] = [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset]a, b[$ siten, että $\xi \in]c, d[$ ja $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in [c, d]$. Osoitetaan, että $f([c, d]) \subset [c, d]$. Olkoon $v \in [c, d]$ mielivaltainen. Jos $v = \xi$, niin $f(v) = v \in [c, d]$. Jos taas $v \ne \xi$, niin väliarvolauseen nojalla

$$\frac{f(v) - f(\xi)}{v - \xi} = f'(\eta), \quad \eta \text{ } v\text{:n ja } \xi\text{:n välissä.}$$

Tällöin

$$|f(v) - \underbrace{f(\xi)}_{=\xi}| = |f'(\eta)| \cdot |v - \xi| < |v - \xi|$$

eli $|f(v) - \xi| < |v - \xi|$. Näin ollen $f(v) \in [c, d]$, ts. $f([c, d]) \subset [c, d]$. Koska f' ja $|f'|$ ovat jatkuvia suljetulla välillä $[c, d]$, $|f'|$ saavuttaa maksiminsa $K < 1$ jossakin välin $[c, d]$ pisteessä, ts. $|f'(x)| \le K < 1$, $\forall x \in [c, d]$. Nyt Lause 2.11.3 $\Longrightarrow$ väite. □

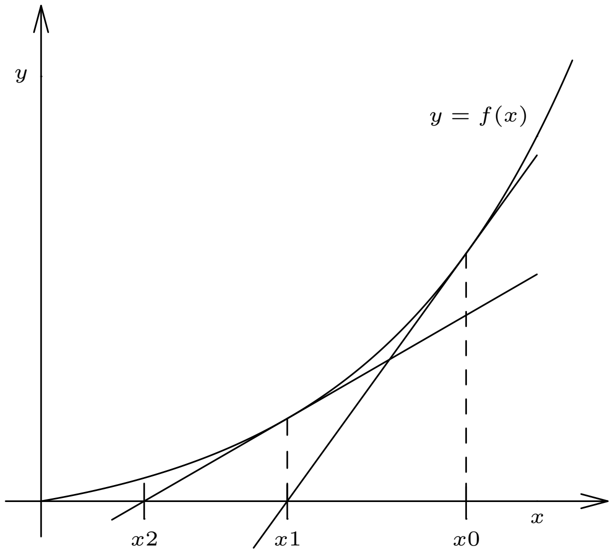
Yhtälön ratkaiseminen Newtonin menetelmällä: Tehtävänä on yhtälön $f(x) = 0$ ratkaiseminen numeerisesti muodostamalla ratkaisulle mielivaltaisen tarkkoja likiarvoja tilanteessa, jossa yhtälöä ei voida ratkaista eksplisiittisesti. Tarkastellaan ns. *Newtonin menetelmää.*

Olkoon f kahdesti derivoituva välillä $[a, b]$ ja $f'(x) > 0$ sekä $f''(x) > 0$ $\forall x \in]a, b[$, jolloin f on aidosti kasvava ja käyrä $y = f(x)$ on kupera alaspäin. Jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin yhtälöllä $f(x) = 0$ on täsmälleen yksi juuri välillä $]a, b[$.

Olkoon $x_0 \in]a, b[$ mielivaltainen piste, jossa $f(x_0) \ge 0$. Pisteessä $(x_0, f(x_0))$ käyrän $y = f(x)$ tangentin yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Koska käyrä $y = f(x)$ on kupera alaspäin, ko. tangentti on käyrän alapuolella ja leikkaa x-akselin lähempänä yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisua kuin x_0 (vrt. Kuva 2.3): $y = 0 \Longleftrightarrow x = x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.



Kuva 2.3: Newtonin menetelmän iteraatioaskel.

Toistetaan sama päätely pisteessä $(x_1, f(x_1))$, jolloin päädytään ko. pisteessä olevan tangentin ja x-akselin leikkauspisteeseen x_2, joka on jälleen lähempänä yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisua kuin arvo x_1. Näin jatkaen muodostuu jono

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.4}$$

joka on laskeva ja alhaalta rajoitettu luvulla, joka on yhtälön $y = f(x)$ ratkaisu ($y = f(x)$ kupera alaspäin). Olkoon $X_R := \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ ts.

$$x_R = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (\in]a, b[).$$

Koska f ja f' ovat jatkuvia ja $f'(x) > 0$ $\forall x \in]a, b[$, seuraa palautuskaavasta (2.4):

$$x_R = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_R - \frac{f(x_R)}{f'(x_R)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_R) = 0.$$

Siis: Jonon $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ raja-arvona on yhtälön $y = f(x)$ yksikäsitteinen juuri x_R: $f(x_R) = 0$.

Funktiota f koskevia oletuksia voidaan lieventää soveltamalla kiintopisteiteraatiota; vrt. Lauseet 2.11.3 ja 2.11.4. Esimerkiksi Lauseesta 2.11.4 saadaan seuraava tulos: Olkoon f'' jatkuva yhtälön $f(x) = 0$ juuren $x = x_R$ jossakin ympäristössä ja olkoon $f'(x_R) \neq 0$. Tällöin jonolle (2.4) pätee $\lim_{n\to\infty} x_n = x_R$, kun alkuarvo x_0 valitaan riittävän läheltä lukua x_R.

Perustelu: Merkitään $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Tällöin:

i) $g(x)$ on hyvinmääritelty ja jatkuvasti derivoituva, sillä $f'(x) \neq 0$, kun $|x - x_R| < \delta$ ja

$$g'(x) = 1 - \left(\frac{f'(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

missä $f''(x)$ on jatkuva;

ii) $g(x_R) = x_R - \frac{f(x_R)}{f'(x_R)} = x_R - \frac{0}{f'(x_R)} = x_R$;

iii) $|g'(x_R)| = \left|\frac{f(x_R)f''(x_R)}{(f'(x_R))^2}\right| = 0 < 1$.

Lause 2.11.4 $\Longrightarrow$ jono $x_{n+1} = g(x_n)$ $(= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)})$ suppenee kohti g:n kiintopistettä $x_R = g(x_R)$ ts. yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisua $x = x_R$.

Luku 3: Integraalilaskentaa

3.1 Integraalifunktio

Olkoot f ja F välillä I määriteltyjä funktioita. Jos

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

sanotaan, että F on funktion f *integraalifunktio* välillä I. Merkintä: $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$.

Esimerkki 3.1.1. $F(x) = \ln x$ on fuktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ integraalifunktio, koska $F'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

Lause 3.1.2. Olkoon $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Tällöin välillä I derivoituva funktio G on f:n integraalifunktio välillä I, jos ja vain jos $\exists C \in \mathbb{R}$ s.e.

$$G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I.$$

Todistus. Jos $G(x) = F(x) + C$, $\forall x \in I$, niin $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, $\forall x \in I$. Siis $G = F + C$ on f:n integraalifunktio $\forall C \in \mathbb{R}$.

Kääntäen, jos $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, niin

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Nyt Lauseen 2.8.4 (integr. laskennan peruslause) nojalla $G(x) - F(x) = C$ (vakio) eli $G(x) = F(x) + C$. $\square$

Integraalifunktio on siis yksikäsitteisesti määrätty *integroimisvakiota* $C \in \mathbb{R}$ vaille. Integraalifunktio on välillä I derivoituva ja siten myös jatkuva funktio. Usein integraalifunktio joudutaan määrittelemään osaväleillä.

Esimerkki 3.1.3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0; \\ 1, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Tällöin esimerkiksi funktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0; \\ x, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{cases} F'(x) = 0, & \text{kun } x < 0; \\ F'(x) = 1, & \text{kun } x > 0, \end{cases} \quad \text{mutta} \quad \begin{cases} F'(0-) = 0; \\ F'(0+) = 1. \end{cases}$$

Ts. F on jatkuva, mutta ei derivoituva pisteessä $x = 0$. Määritelmän mukaan F on f:n integraalifunktio väleillä I, jotka eivät sisällä pistettä $x = 0$.

Lause 3.1.4. (Integroinnin lineaarisuus) Integraalifunktioille pätee:

i) $\int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;

ii) $\int af(x)\mathrm{d}x = a\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$, $a\in\mathbb{R}$ vakio.

Todistus. Seuraa vastaavista derivaatan ominaisuuksista. □

Esimerkki 3.1.5.

$$\int 2x(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x = 2\left(\int x^{3/2}\mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x\right) = 2\left(\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{2}x^2\right)+C = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-x^2+C.$$

Perusintegraaleja:

(1) $\int x^a\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$, $a\neq -1$;

(2) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$, $x\neq 0$;

(3) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(4) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \tan x + C$, $x\neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$;

(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x = -\cot x + C$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

(7) $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$;

(8) $\int a^x\mathrm{d}z = a^x\cdot\log_a e + C = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$;

(9) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \overline{\text{arc}}\text{sin}x + C$, $|x|<1$;

(10) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \overline{\text{arc}}\text{tan}x + C$.

Ottamalla huomioon yhdistetyn funktion derivoimissääntö saadaan

(11) $\int f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x = e^{f(x)}+C$;

(12) $\int \dfrac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$;

(13) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|+C$;

(14) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C$;

(15) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$;

(16) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+C$, $|x|<1$.

3.2 Integroimismenetelmiä

Rationaalifunktion integrointi: Rationaalifunktion $P(x)/Q(x)$ ($P(x)$ ja $Q(x)$ polynomeja) integroimiseksi saatetaan se jakolaskulla ensin muotoon

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

missä $H(x)$ ja $R(x)$ ovat polynomeja siten, että $R(x)$:n asteluku on pienempi kuin $Q(x)$:n asteluku. Tässä $H(x)$ on polynomina helppo integroida. Termin $R(x)/Q(x)$ integroiminen suoritetaan muodostamalla sille ns. *osamurtokehitelmä* seuraavien sääntöjen avulla.

A) Jos $Q(x)$:n kaikki juuret ovat reaalisia ja niiden kertaluku on 1, voidaan $R(x)/Q(x)$ esittää muodossa:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{a(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

missä vakiot $A_1, \ldots, A_n$ on erikseen määrättävä. Tämän jälkeen jokainen termi $A_i/(x - x_i)$ voidaan integroida logaritmifunktion avulla.

Esimerkki 3.2.1. Olkoon $f(x) = (5x + 3)/(x^2 - 1)$. Siten f:n juuret ovat 1 ja -1. Siis

$$\frac{5x+3}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{A_1(x+1) + A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-A_2)}{x^2-1}$$

ja ratkaisemalla saadaan nyt $A_1 = 4$ ja $A_2 = 1$. Siis

$$\frac{5x+3}{x^2-1} = \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

B) Juuren $x = a \in \mathbb{R}$ kertaluku on $n > 1$. Tällöin $Q(x)$:n ko. juurta asetetaan vastaamaan lauseke

$$\frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(x-a)^n}.$$

Esimerkki 3.2.2. $\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)}$. Nyt juuret ovat $x = 0$ kertaluvultaan 2 ja $x = 1$ kertaluvultaan 1. Niinpä

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)}.$$

Ratkaisemalla:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = 1. \end{cases}$$

Siis $\dfrac{1}{x^3-x^2} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}$.

C) $Q(x)$:llä on kompleksinen juuripari $x = a \pm ib$ ($i^2 = -1$). Jos juuriparin kertaluku on 1, asetetaan paria vastaamaan lauseke

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

missä vakiot $A, B \in \mathbb{R}$ on määrättävä ja missä $x^2 + px + q = (x-a)^2 + b^2$ $(= (x-(a+ib))(x-(a-ib)))$. Jos juuriparin $x = a + ib$ kertaluku on n, lausekkeeksi asetetaan

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Esimerkki 3.2.3. $\dfrac{x+2}{x^3+x} = \dfrac{x+2}{x(x^2+1)}$. Juuret ovat $x = 0$ kertaluvultaan 1 ja $x = \pm i$ kertaluvultaan 1. Siis

$$\frac{x+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}.$$

Ratkaisemalla:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -2 \\ C = 1 \\ A = 2. \end{cases}$$

Siis $\dfrac{x+1}{x^3+x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1-2x}{x^2+1}$.

Kun lausekkeen $R(x)/Q(x)$ osamurtokehitelmä on muodostettu Q:n juurien avulla, integroidaan siinä olevat termit perusintegraalien avulla.

Esimerkki 3.2.4. $\int \dfrac{2x+3}{x^3 - x^2 - x + 1} \mathrm{d}x$. Nimittäjän nollakohdat: $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1) = 0 \iff x = 1$ (kertaluku 2) ja $x = -1$. Osamurtokehitelmäksi saadaan

$$\frac{2x+3}{x^3 - x^2 - x + 1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Integrointi antaa

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{x^3 - x^2 - x + 1} \mathrm{d}x &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{5}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C \\
&= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{5}{2x-2} + C.
\end{aligned}$$

Osittaisintegrointi:

Lause 3.2.5. (Osittaisintegrointi)

$$\int f'(x) g(x) \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \mathrm{d}x.$$

Todistus. Tulon derivointisäännön $D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$ integrointi antaa

$$f(x) g(x) = \int f'(x) g(x) \mathrm{d}x + \int f(x) g'(x) \mathrm{d}x,$$

mistä väite heti seuraa. □

Osittaisintegroinnissa funktiot f ja g pyritään valitsemaan niin, että $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ olisi helpompi laskea kuin $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Esimerkki 3.2.6. a) Määrätään $\int(3x-7)e^{-x}\mathrm{d}x$. Asetetaan $f'(x)=e^{-x}$ ja $g(x)=3x-7$, jolloin $f(x)=-e^{-x}$ ja $g'(x)=3$. Siten osittaisintegrointikaava antaa

$$\begin{aligned}\int(3x-7)e^{-x}\mathrm{d}x &= (3x-7)\cdot(-e^{-x})-\int 3\cdot(-e^{-x})\mathrm{d}x\\ &= -(3x-7)e^{-x}+3\cdot\int e^{-x}\mathrm{d}x\\ &= (7-3x)e^{-x}-3e^{-x}+C\\ &= (4-3x)e^{-x}+C.\end{aligned}$$

b) Määrätään $\int \ln x\,\mathrm{d}x$. Tulkitaan integroitava funktio $\ln x$ tulona $1\cdot\ln x$. Asetetaan $f'(x)=1$ ja $g(x)=\ln x$, jolloin $f(x)=x$ ja $g'(x)=1/x$. Tällöin

$$\int \ln\mathrm{d}x = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x-\int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x-x+C.$$

Integrointi sijoituksella (eli muuttujan vaihto): Sijoitusmenetelmässä integraali $\int f\mathrm{d}x$ lasketaan ottamalla käyttöön uusi muuttuja sijoituksella $x=g(t)$. Funktion g on oltava derivoituva ja monotoninen (ainakin jollakin osavälillä, jossa muuttujanvaihtoa sovelletaan).

Lause 3.2.7. Olkoon $x=g(t)$ muuttujan t suhteen derivoituva ja bijektiivinen (aidosti kasvava tai vähenevä) funktio. Tällöin

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(g(t))\cdot g'(t)\mathrm{d}t.$$

Todistus. Olkoon $F(x)$ funktion $f(x)$ integraalifunktio. Sijoitetaan $x=g(t)$ ja derivoidaan t:n suhteen käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(g(t))=f(g(t))\cdot g'(t).$$

Integroimalla t:n suhteen saadaan

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)=F(g(t))=\int f(g(t))\cdot g'(t)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Muistisääntö: Jos $x=g(t)$, niin $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g'(t)$ eli $\mathrm{d}x=g'(t)\mathrm{d}t$. Siis, jos x korvataan $g(t)$:llä, on differentiaali $\mathrm{d}x$ korvattava integraalissa differentiaalilla $g'(t)\mathrm{d}t$.

Huom! Kun integraali on laskettu sijoituksen $x=g(t)$ avulla, on $F(x)$:n selvittämiseksi palattava alkuperäiseen muuttujaan x sijoituksella $t=g^{-1}(x)$. Tämä onnistuu, sillä $g(t)$:n bijektiivisyys takaa käänteisfunktion olemassaolon (valitulla osavälillä). Huomaa, että tulos on usein helppo tarkistaa derivoimalla ja saatu integraalifunktion lauseke saattaa olla voimassa myös apuna käytetyn osavälin (jossa valittu g monotoninen) ulkopuolella.

Sijoitusmenetelmää sovelletaan usein seuraavasti:

1) valitaan sopiva sijoitus $t = \phi(x)$;

2) määrätään käänteisfunktio $x = \phi^{-1}(t) = g(t)$;

3) korvataan x $g(t)$:llä ja dx $g'(t)$dt:llä;

4) integroidaan t:n suhteen;

5) palautetaan muuttuja x sijoituksella $t = \phi(x)$.

Tavoitteena sijoituskeinossa on suorittaa muuttujen vaihto niin, että integraali $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t$ on helpompi laskea kuin alkuperäinen integraali $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Esimerkki 3.2.8. a) Määrätään $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}$, $x \geq -1$. Sijoitetaan $t = \sqrt{1+x}$ (≥ 0). Tällöin $x = t^2 - 1$ ja $\mathrm{d}x = 2t \cdot \mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}} = \int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2t - 2\ln|1+t| + C$$
$$= 2\sqrt{1+x} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + C.$$

b) Määrätään $\int \cos^5 x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$. Sijoitetaan $t = \cos x$, jolloin $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$ eli $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$. Siten

$$\int \cos^5 x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \int t^5(-\mathrm{d}t) = -\int t^5 \mathrm{d}t = -\frac{1}{6}t^6 + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

Tässä käänteisfunktiota $x = \phi^{-1}(t) = g(t)$ ei eksplisiittisesti laskettu vaan differentiaalien välinen yhtälö selvitettiin derivoimalla $t = \phi(x)$ muuttujan x suhteen.

c) Määrätään $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$. Sijoitetaan $t = \ln x$, jolloin $x = e^t$ ja $\mathrm{d}x = e^t \cdot \mathrm{d}t$. Siten

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int \frac{e^t\mathrm{d}t}{e^t t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

3.3 Määrätty integraali

Olkoon f suljetulla välillä määritelty ja rajoitettu funktio, ts. $|f(x)| \leq M < \infty$ kaikilla $x \in [a,b]$. Muodostetaan välin $[a,b]$ jako D n:ään osaväliin:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ja merkitään

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad \text{ja} \quad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

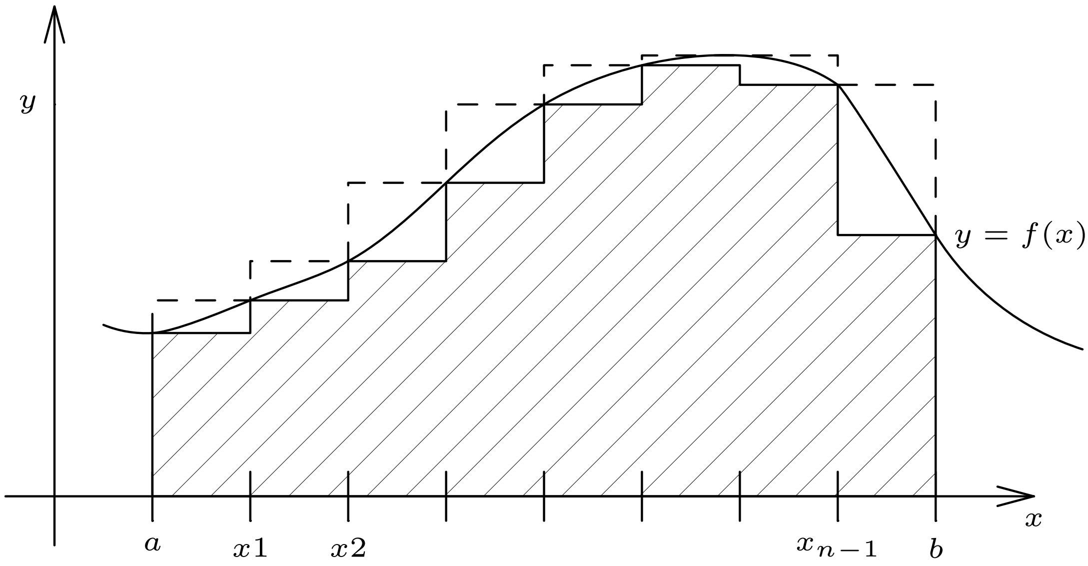
f:n jakoon D liittyvä *alasumma* ja *yläsumma* määritellään seuraavasti:

$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{and} \quad S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Selvästi $s_D \leq S_D$. Lisäksi jos jakoa D tihennetään jakamalla y_0 osavälit edelleen yhteen tai oseampaan osaan eli muodostetaan jaon D alajako D_1 niin alasumma ei pienene eikä yläsumma kasva. Siis: Jos D_1 on jaon D alajako, niin

$$s_D \leq s_{D_1} \leq S_{D_1} \leq S_D.$$

Havainnollisesti: approksimaatio f:n rajoittaman alueen pinta-ala välillä $[a, b]$ paranee.



Kuva 3.1: $s_d =$ "varjostetun alueen pinta-ala"ja $S_D =$ "katkoviivalla rajatun kuvio pinta-ala".

Kaikkien alasummien joukko $\{s_D : D \text{ jako}\}$ on ylhäältä rajoitettu ja yläsummien joukko $\{S_D : D \text{ jako}\}$ on alhaalta rajoitettu (tässä D on välin $[a, b]$ mielivaltainen jako). Täydellisyysaksioman nojalla

$$\underline{I} = \sup\{s_D : D \text{ jako}\} \quad \text{ja} \quad \overline{I} = \inf\{S_D : D \text{ jako}\}$$

ovat olemassa. Lisäksi $\underline{I} \leq \overline{I}$. Lukua $\underline{I}$ kutsutaan f:n *alaintegraaliksi* ja lukua $\overline{I}$ f:n *yläintegraaliksi* välillä $[a, b]$. Näiden avulla voidaan määritellä funktion f integroituvuus (itse asiassa ns. Riemann-integroituvuus):

$$\text{f on integroituva välillä } [a, b], \text{ jos } \underline{I} = \overline{I}.$$

Tällöin luku $\underline{I} = \overline{I}$ kutsutaan funktion f *määrätyksi integraaliksi (so. Riemann-integraaliksi) välillä* $[a, b]$ ja merkitään

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (= \underline{I} = \overline{I}).$$

Esimerkki 3.3.1. Jos $f(x) = c$, $\forall x \in [a, b]$, niin f on integroituva, sillä $s_D = S_D = c \cdot (b - a)$ mille tahansa jaolle D. Siis: $\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c \cdot (b - a)$.

Funktion f integroituvuus välillä $[a, b]$ voidaan karakterisoida myös seuraavasti: Olkoon $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, jolloin $m_i \leq f(t_0) \leq M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tällöin

$$\delta_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

on f:n jakoon D liittyvä *välisumma* eli *Riemannin summa*. Funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, jos ja vain jos

$$\exists \lim_{|D|\to 0} \delta_D, \quad \text{missä } |D| = \underbrace{\max_{1\le i\le n} \{|x_i - x_{i-1}|\}}_{\text{ns. jaon } D \text{ normi}}$$

(riippumatta muuten jaon D ja välipisteiden t_i valinnasta). Tässä tapauksessa

$$\lim_{|D|\to 0} \delta_D = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Lause 3.3.2. a) Jos f on monotoninen välillä $[a, b]$ tai b) f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin f on myös integroituva välillä $[a, b]$.

Todistus. a) Olkoon D välin $[a, b]$ tasavälinen jako, jossa $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, \ldots, n$. Kun esim. f kasvava, saadaan

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_D - s_D = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \Delta x \cdot (f(b) - f(a)) \to 0,$$

kun $\Delta x \to 0$.

b) Todistus perustuu siihen, että suljetulla välillä jatkuva funktio on *tasaisesti jatkuva*:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(Tässä siis δ **ei** riipu pisteiden $x, y \in [a, b]$ valinnasta.) Valitaan nyt jako D s.e. $|D| < \delta$. Tällöin

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_D - s_D = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \epsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a).$$

Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, on oltava $\overline{I} - \underline{I} = 0$. (Tasaista jatkuvuutta koskevaa väitettä emme tässä todista.) □

Integroituvuuden määritelmästä on ilmeista, että jos väli $[a, b]$ on jaettu äärellisen moneen osaväliin, niin f on integroituva välillä $[a, b]$, jos ja vain jos se on integroituva jokaisella osavälillä. Lauseesta 3.3.2 seuraa, että *paloittain monotomiset* ja *paloittain jatkuvat* rajoitetut funktiot ovat integroituvia välillä $[a, b]$.

Määrätty integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ voidaan määritellä myös tapauksessa $b < a$ asettamalla

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

ja tapauksessa $a = b$ asettamalla $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Lause 3.3.3. i) $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, c vakio;

ii) $\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

iii) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$, $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$;

iv) Jos $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, niin

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a);$$

v) Jos $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, niin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

vi) Jos f on integroituva välillä $[a,b]$, niin myös $|f|$ on integroituva välillä $[a,b]$, ja

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Kohdissa i)-v) oletetaan funktiot f ja g integroituviksi ko. välillä.

Todistus. Kohdat i)-iii) saadaan helposti välisumman raja-arvoon perustuvan integroituvuuden karakterisaation avulla. Kohta iv) seuraa heti integroituvuuden määritelmästä.

v) $f(x) - f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, siis iv) antaa

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \overbrace{=}^{i),ii)} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Kohdassa vi) funktion $|f|$ integroituvuuden todistuksen sivuutamme. Ko. epäyhtälö saadaan v):n avulla:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \overbrace{\Longrightarrow}^{v)} -\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$ □

Lause 3.3.4. (Integraalilaskennan väliarvolause) Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$, niin on olemassa $\xi \in]a,b[$ siten, että

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Todistus. Olkoon m f:n minimiarvo ja M f:n maksimiarvo välillä $[a,b]$. Tällöin Lauseen 3.3.3 kohdan iv) nojalla

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Jos f on vakiofunktio, kelpaa ξ:ksi mikä tahansa välin $]a,b[$ piste. Jos f ei ole vakio, on $m < M$ ja f:n jatkuvuuden nojalla

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < M \qquad \text{(Perustelu!)}.$$

Olkoot $f(x_1) = m$ ja $f(x_2) = M$. Tällöin f:n jatkuvuuden nojalla $\exists \xi \in]x_i, x_2[$ (tai $\xi \in]x_2, x_1[$) siten, että $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. □

Lause 3.3.5. (Differentiaali- ja integraalilaskennan päälause) Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin:

i) Funktio $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ on f:n integraalifunktio, ts. $F_a'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$;

ii) Jos F on f:n jokin integraalifunktio välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = /_a^b F(x) = F(b) - F(a) \qquad \text{(Newton-Liebniz'in kaava).}$$

Todistus. i) Lauseen 3.3.3 kohdan iii) nojalla

$$\begin{aligned} F_a(x+h) - F_a(x) &= \int_a^{x+h} f(x)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Nyt Lauseen 3.3.4 nojalla pisteiden x ja $x + h$ välissä on piste ξ siten, että

$$f(\xi) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}. \tag{3.1}$$

Kun $h \to 0$, niin $\xi \to x$ ja $f(\xi) \to f(x)$ funktion f jatkuvuuden nojalla. Siten (3.1) $\Longrightarrow$ $f(x) = F_a'(x)$.

ii) Koska F ja F_a ovat f:n integraalifunktioita, pätee $F(x) = F_a(x) + C$ kaikilla $x \in [a, b]$. Nyt $F_a(a) = 0$ eli $F(a) = C$, jolloin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F_a(b) = F(b) - C = F(b) - F(a). \qquad \square$$

Esimerkki 3.3.6. Määrätään $\int_0^{\pi/2}(1 + \cos x)\mathrm{d}x$. Selvästi $\int(1 + \cos x)\mathrm{d}x = x + \sin x + C$, joten

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}(1 + \cos x)\mathrm{d}x &= /_0^{\pi/2}(x + \sin x) = (\pi/2 + \sin \pi/2 - (0 + \sin 0)) \\ &= \pi/2 + 1 \approx 2.57. \end{aligned}$$

Huom! Newton-Leibniz'in kaavan käyttö määrätyn integraalin laskemiseksi edellyttää: Integroitavana oleva funktio $f(x)$ on jatkuva tai vähintäänkin integroituva funktio välillä $[a, b]$.

Seuraus 3.3.7. (Määrätyn integraalin osittaisintegrointikaava)

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = /_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Vastaavasti määrätyn integraalin laskeminen muuttujan vaihdolla saa seuraavan muodon.

Seuraus 3.3.8. (Määrätyn integraalin sijoitusmenetelmä) Olkoon $f(x)$ jatkuva välillä $[a, b]$ ja $x = g(t)$ t:n suhteen jatkuvasti derivoituva funktio välillä $[\alpha, \beta]$, missä $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

Todistus.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = (F \circ g)(\beta) - (F \circ g)(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t,$$

sillä $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ g)(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$. □

Huom! Sijoitusfunktion $x = g(t)$ kääntyvyyttä ei tässä tarvita eikä muuttujaa x tarvitse palauttaa. Sen sijaan integrointirajat on huomattava vaihtaa.

Esimerkki 3.3.9. Määrätään $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x$. Sijoitetaan $x = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Tällöin $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$, $\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$, $\sin 0 = 0$ ja $\sin \pi/2 = 1 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \cos^6(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big/_0^{\pi/2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - (0 + 0)\right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Huom! Lause 3.3.5 todistettiin integraalilaskennan väliarvolauseen avulla. Toisaalta, jos Newton-Leibniz'in kaava yhdistetään integraalilaskennan väliarvolauseeseen, saadaan

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a}(F(b) - F(a)), \quad \xi \in]a, b[,$$

missä F on f:n jokin integraalifunktio, ts. $F' = f$. Siis integraalilaskennan väliarvolause (Lause 3.3.4) palautuu tavalliseen väliarvolauseeseen (Lause 2.8.7) funktiolle F.

3.4 Epäoleellinen integraali

Edellisessä kohdassa esitettiin määrätty integraali suljetulla välillä rajoitetuille funktioille. Kun integroimisväli on ääretön tai funktio ei ole rajoitettu integroimisvälillään päädytään määrätyn integraalin laajennukseen, jota kutsutaan *epäoleelliseksi integraaliksi.*

Rajoittamaton integroimisväli: Olkoon f integroituva välillä $[a, b]$ kaikilla $b > a$. Jos raja-arvo

$$\left(\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

on olemassa sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *suppenee.* Jos yo. raja-arvo, kun $b \to \infty$, ei ole olemassa sanotaan integraalin $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *hajaantuvan.* Vastaavasti määritellään epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Se suppenee, jos ko. raja-arvo on olemassa, ja muussa tapauksessa hajaantuu. Edelleen voimme määritellä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Ko. integraali suppenee, jos molemmat oikealla puolella olevat integraalit suppenevat, ts.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty, a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 3.4.1.

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \Big/_{1}^{b} - e^{-x} = \lim_{b\to\infty} (-(e^{-b} - e^{-1}) = -(0 - e^{-1}) = e^{-1} (\approx 0.37).$$

Siis integraali $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ suppenee ja sen arvo on e^{-1}.

Rajoittamaton integrandi: Olkoon funktio f määritelty esim. puoliavoimella välillä $[a, b[$ ja oletetaan, että f on rajoitettu ja integroituva osaväleillä $[a, d] \subseteq [a, b[$ $(d < b)$. Jos raja-arvo

$$\left(\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \right) \lim_{d\to b-} \int_{a}^{d} f(x)\mathrm{d}x$$

on olemassa sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *suppenee*. Muussa tapauksessa ko. integraali *hajaantuu*.

Esimerkki 3.4.2. Integraali $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ on epäoleellinen molemmissa päätepisteissä.

$$\int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/_{a}^{b} \overline{\arcsin} x = \overline{\arcsin} b - \overline{\arcsin} a,$$

joten

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{a\to-1+, b\to1-} (\overline{\arcsin} b - \overline{\arcsin} a) = \overline{\arcsin}(1) - \overline{\arcsin}(-1) \\ &= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi. \end{aligned}$$

Siis $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ suppenee ja sen arvo on π.

Epäoleellisen integraalin suppeneminen saattaa olla hankala selvittää suoraan määritelmästä käsin. Seuraava *majoranttiperiaate* saattaa tällöin auttaa.

Lause 3.4.3. (Majoranttiperiaate) Olkoot $0 \le f(x) \le g(x)$ jokaisessa välin $[a, b[$ pisteessä. Jos $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ suppenee, niin myös $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ suppenee ja

$$0 \le \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x.$$

Todistus. Olkoon $c \in [a,b[$. Tällöin välillä $[a,c]$

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \underbrace{\leq}_{Lause\ 3.3.3v)} \int_a^c g(x)\mathrm{d}x \underbrace{\leq}_{g(x)\geq 0,\ c<b} \lim_{c\to b-}\int_a^c g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tässä $M = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \infty$, joten $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ on ylhäältä rajoitettu kaikilla $c \in [a,b[$. Lisäksi

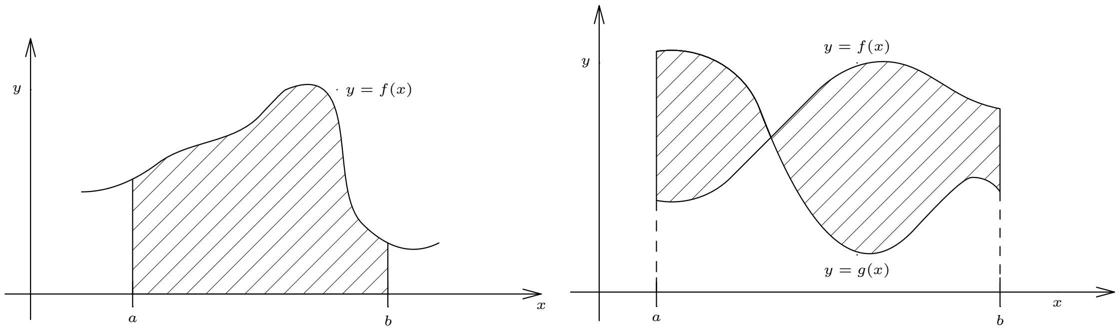
$$c_1 \leq c_2 \underbrace{\Longrightarrow}_{f(x)\geq 0} \int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{c_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

joten

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sup_{c\in[a,b[}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \leq M < \infty.$$ □

3.5 Määrätyn integraalin sovelluksia

Jos f on ei-negatiivinen ja integroituva välillä $[a,b]$, niin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ määritelmän mukaan yhtyy käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$, $x = b$ rajoittaman alueen pinta-alaan. Vastaavasti esim. integraali $\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$ antaa käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sekä suorien $x = a$, $x = b$ rajoittaman alueeen pinta-alan.



(a) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(b) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$

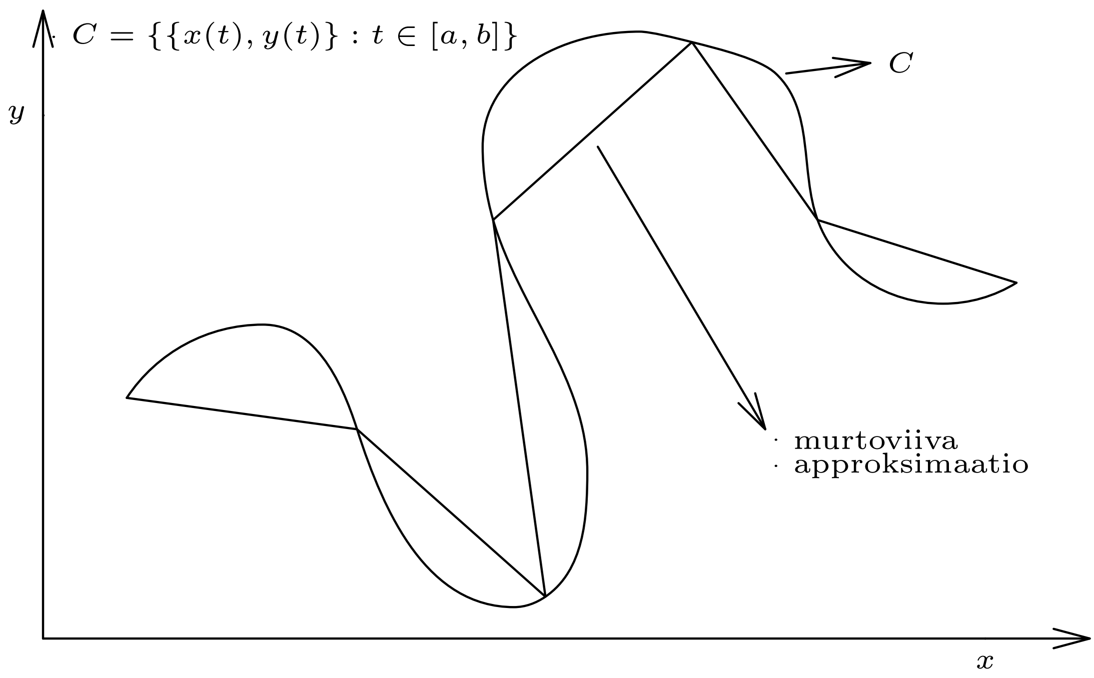
Käyrän pituus: Tarkastellaan tasokäyrää, joka on annettu parametrimuodossa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, missä $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita parametrin t suhteen. Tavoitteena on määrätä kyseisen käyrän pituus.

Jaetaan väli $[a,b]$ osaväleihin jakopisteillä $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$. Syntyvän murtoviivan pituus on

$$S_D = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

missä $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$ ja $\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$. Väliarvolauseen nojalla $\exists \xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$ ja $\eta_i \in]t_{i-1}, t_i[$ siten, että $\Delta x_i = x'(\xi_i)\cdot\Delta t_i$ ja $\Delta y_i = y'(\eta_i)\cdot\Delta t_i$, missä $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, joten

$$S_D = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\cdot\Delta t_i.$$



Kuva 3.2: Käyrä C ja murtoviiva-approksimaatio.

Kun $\xi_i = \eta_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, yhtyy edellinen summalauseke funktion $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ Riemannin summaan. Kun $|D| = \max_{i=1,\ldots,n}\{\Delta t_i\} \to 0$ päädytää integraaliin

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t \left(= \lim_{|D|\to 0} S_D\right).$$

Toisaalta ko. murtoviiva approksimaatio käyrälle paranee ja rajalla murtoviivan pituus yhtyy käyrän C pituuteen. (Voidaan osoittaa, että yo. raja-arvo on olemassa myös kun $\xi_i \neq \eta_i$.) Siis käyrän C pituus L saadaan integraalina:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

Erityisesti käyrän $y = f(x)$, missä f on jatkuvasti derivoituva funktio välillä $[a, b]$, pituus L saadaan integraalina:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 3.5.1. Määrätään käyrän $y = x^{3/2}$ pituus välillä $[0, 5]$. $f(x) = x^{3/2}$ on jatkuvasti derivoituva ja $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Siten ko. käyrän pituus L välillä $[0, 5]$ on

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + (3/2x^{1/2})^2}\mathrm{d}x = \int_0^5 (1 + \frac{9}{4}x)^{1/2}\mathrm{d}x = /_0^5 \frac{2}{3}(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{7^3}{27} - \frac{8}{27} = \frac{335}{27} = 12\frac{11}{27}.$$

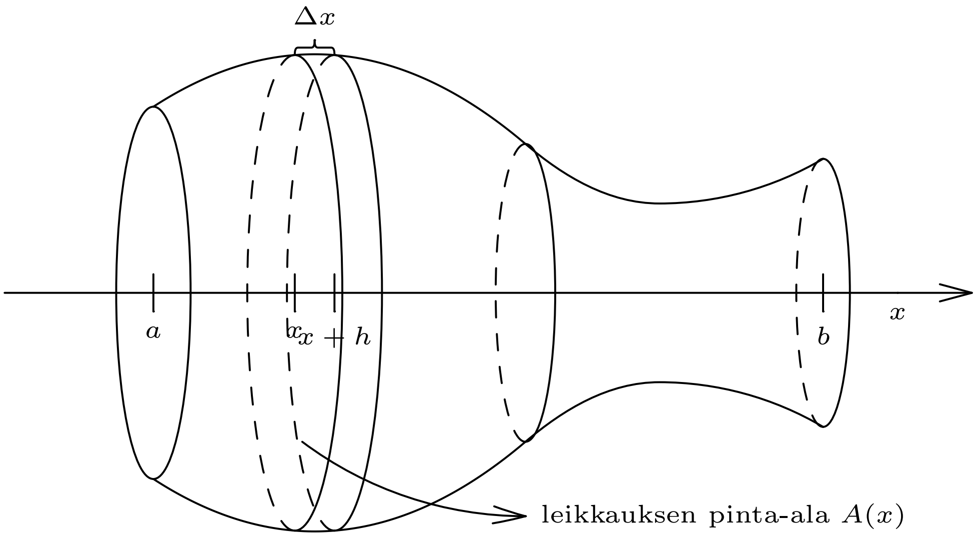
Kappaleen tilavuus: Oletetaan, että $\mathbb{R}^3$:n kappaletta rajoittavat jokin pinta ja tasot $x = a$, $x = b$, katso esim. Kuva 3.3 alla. Kappaleen tilavuus voidaan laskea määrätyn integraalin avulla. Lähtökohtana on suoran lieriön tilavuuden kaava $V = A \cdot h$, missä A on pohjan ala ja h lieriön korkeus. Välille $[x, x+h]$ jäävän kappaleen tilavuutta approksimoi lauseke $\Delta V = A(x)\Delta x$. Muodostamalla välin $[a, b]$ jako D: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ saadaan kappaleen tilavuudelle arvio

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Kun jakoa tihennetään, ts. kun $|D| \to 0$, saadaan rajalla (mikäli ko. raja-arvo on olemassa) kappaleen tilavuus V integraalina:

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x,$$

missä $A(x)$ on pisteessä x olevan x-aksilia kohtisuorassa olevan tason määräämän kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala. Differentiaalimerkintöjä käyttämällä: $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$ ja $V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$.



Kuva 3.3: Kappaleen tilavuuden approksimointi

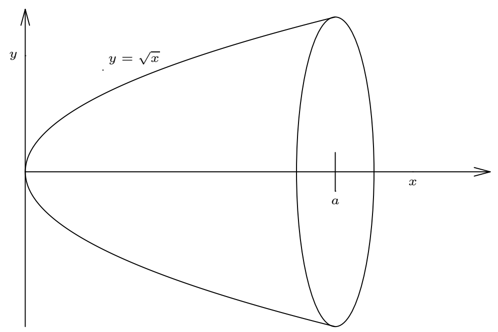
Erikoistapauksena saadaan *pyörähdyskappaleen tilavuus:* Olkoon f jatkuva ja ei-negatiivinen funktio välillä $[a, b]$. Kun käyrän $y = f(x)$ ja suorien $x = a$, $x = b$ sekä x-akselin rajoittama tasoalue pyörähtää $\mathbb{R}^3$:ssa x-akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Nimittäin nyt $A(x) = \pi f(x)^2$.

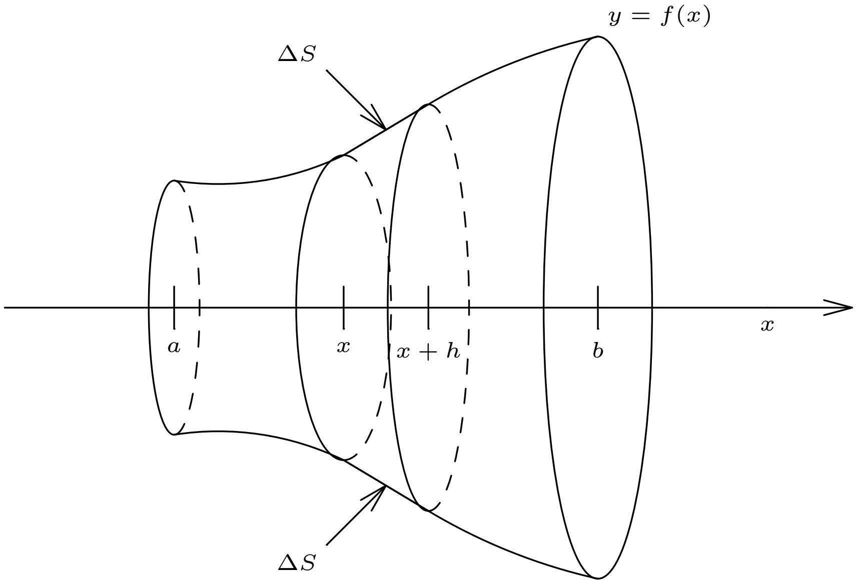
Esimerkki 3.5.1 Käyrän $y = \sqrt{x}$ ja suoran $x = a$ rajoittaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy kappale, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \mathrm{d}x = \pi /_0^a \frac{1}{2} x^2 = \frac{\pi}{2} a^2.$$



Pyörähdyskappaleen pinta-ala:
Välillä $[x, x+h]$ olevan jänteen pituus on (katso Kuva 3.4)

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f(x))^2}.$$



Kuva 3.4: Kappaleen pinta-alan approksimointi

Kun ko. jänne pyörähtää x-akselin ympäri on syntyvän pinnan ala

$$\Delta A = 2\pi \cdot \rho_x \cdot \Delta s,$$

missä $\rho_x = \frac{1}{2}(f(x) + f(x+h))$, ($\rho_x \to f(x)$, kun $h \to 0$). Olettamalla $f(x) \geq 0$ jatkuvasti derivoituvaksi välillä $[a, b]$ seuraa väliarvolauseesta, että $\Delta f(x) = f'(\xi) \cdot \Delta x$ eräällä $\xi \in]x, x+h[$. Siten

$$\Delta S = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\Delta x.$$

($f'(\xi) \to f'(x)$, kun $h \to 0$). Muodostamalla välin $[a, b]$ jako D ja antamalla $|D| \to 0$ päädytään rajalla integraaliin

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x,$$

joka antaa syntyvän pyörähdyskappaleen pinta-alan. Differentiaalimerkintöjä käyttämällä

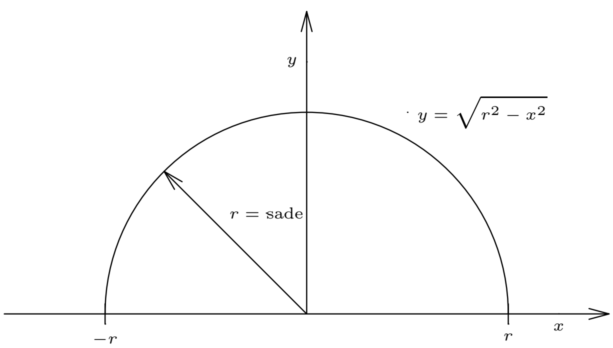
$$\mathrm{d}A = 2\pi f(x)\mathrm{d}s = 2\pi f(x)\underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x}_{\text{vrt. käyrän pituus}}$$

ja

$$A = \int_a^b \mathrm{d}A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

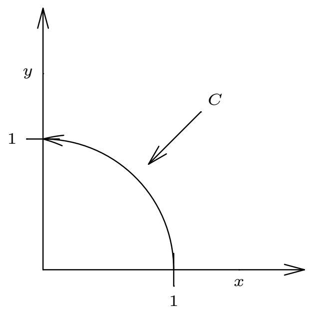
Esimerkki 3.5.2 Puoliympyrän $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy r-säteinen pallo. Koska $y'(x) = -x \cdot (r^2 - x^2)^{-1/2}$, saadaan pallon pinta-alaksi:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} r\mathrm{d}x = 2\pi \cdot /_{-r}^{r} r \cdot x = 4\pi r^2. \end{aligned}$$



Integrointi kaarenpituuden suhteen: Lähtökohta: Integroimisväli $\mathbb{R}$:ssä korvataan käyrällä $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon C säännöllinen kaari $\mathbb{R}^2$:ssa parametriesityksenä $F(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ *integraali yli kaaren* C voidaan määritellä kaavalla

$$\int_C f \mathrm{d}S = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t.$$



Esimerkki 3.5.4 Olkoon $x(t) = \cos t$ ja $y(t) = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_C xy \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} x(t)y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}_{=1} \mathrm{d}t \\ &= \Big/_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2 t = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **käyräintegraali (usein työintegraali):** Olkoon C säännöllinen kaari $\mathbb{R}^2$:ssa ja $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Funktion $\overline{f}$ *käyräintegraalin yli kaaren* C määrittelee yhtälö

$$\int_C \overline{f}(\overline{r}) \bullet \mathrm{d}\overline{r} = \int_a^b \overline{f}(\overline{r}(t)) \bullet \overline{r}'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left[f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t)\right] \mathrm{d}t,$$

missä $\overline{f} = (f_1, f_2)$ on jaettu x- ja y-komponenttiinsa.

Fysikaalinen tulkinta: Kappaleen kulkiessa pitkin käyrää C on siihen vaikuttavan voiman $\overline{f}$ suorittama työ W käyrällä C

$$W = \int_C \overline{F}(\overline{r}) \bullet \mathrm{d}\overline{r}.$$

Olkoon

$$\overline{T}(x(t), y(t)) = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}\right)$$

käyrän C pisteessä $(x(t), y(t))$ oleva *normeerattu tangenttivektori.* Tällöin $\overline{f} \bullet \overline{T}$ on $\overline{f}$*:n tangentiaalikomponentti* ja pätee (mat. menet. II kurssi):

$$\int_C \overline{f}(\overline{r}) \bullet \mathrm{d}\overline{r} = \int_C \overline{f} \bullet \overline{T} \mathrm{d}s.$$

Huom.! Tulkinta integroinnille kaarenpituuden suhteen (piirrä kuva).

Luku 4: Reaalilukusarjoista

4.1 Reaalilukujonot ja -sarjat sekä niiden suppeneminen

Reaalilukujonon raja-arvo: Jos jokaista positiivista kokonaislukua $n \in \mathbb{Z}_+$ asetetaan vastaamaan reaaliluku x_n, syntyy (päättymätön) *jono*, jota merkitään

$$(x_n) \quad \text{tai} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{(merkinnän } (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \text{ sijasta).}$$

Jono voidaan siten tulkita funktiona $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Jonon raja-arvo voidaan tämän nojalla määritellä seuraavasti: Jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on raja-arvo L, merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, jos

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N_\epsilon \; (\in \mathbb{N}) \quad \text{s.e.} \quad n > N_\epsilon \implies |x_n - L| < \epsilon.$$

Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ $(\in \mathbb{R})$ on olemassa sanotaan, että jono (x_n) *suppenee*. Muussa tapauksessa jono (x_n) *hajaantuu*.

Esimerkki 4.1.1. Jono $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ suppenee ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $N_\epsilon \geq \frac{1}{\epsilon}$, $N_\epsilon \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$n > N_\epsilon \quad \implies \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\epsilon} \leq \epsilon.$$

Seuraava tulos seuraa suoraan funktion ja lukujonon raja-arvon määritelmästä.

Lause 4.1.2. Jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ja $f(n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, niin jono (x_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

Esimerkki 4.1.3. Määrätään jonon $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overbrace{=}^{\text{l'H.}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \quad \underbrace{\implies}_{\text{Lause 4.1.2}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Lukujonojen raja-arvoille pätevät määritelmän nojalla samat laskusäännöt ja perusominaisuudet kuin funktioiden raja-arvoille; kts. esim. Lause 2.4.3.

Jonoa (x_n) sanotaan *monotoniseksi* jos se on kasvava, ts. $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, tai vähenevä, ts. $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Lause 4.1.4. Jos jono (x_n) on monotoninen ja rajoitettu ($|x_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$), niin se suppenee.

Todistus. Joukko $A = \{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ on ylhäältä ja alhaalta rajoitettu, joten $\exists \sup A$ ja $\inf A$. Jos jono (x_n) on kasvava seuraa supremumin määritelmästä helposti, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$ (yksityiskohdat sivuutetaan). Vastaavasti vähenevän jonon tapauksessa $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf A$. $\square$

Lukujonon raja-arvo voidaan määritellä myös tapauksissa $L = \pm\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \text{ jos } \forall M > 0\ \exists N > 0 \quad \text{s.e.} \quad n > N \implies x_n > M,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{ jos } \forall M > 0\ \exists N > 0 \quad \text{s.e.} \quad n > N \implies x_n < -M.$$

Reaalilukusarjat ja niiden suppeneminen: Reaalilukusarjoilla tarkoitetaan reaalilukujen summalausekkeita, joissa on ääretön määrä yhteenlaskettavia. Olkoon (x_n) reaalilukujono. Muodostetaan jonosta (x_n) uusi jono, ns. osasummien jono:

$$(s_n)_{n=1}^{\infty}, \quad s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Jos osasummien jonolla $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on raja-arvo, sanotaan, että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ $(= x_1 + x_2 + \ldots)$ *suppenee*. Tällöin osasummien jonon (s_n) raja-arvoa S sanotaan *sarjan summaksi* ja merkitään:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s \quad (= \lim_{n\to\infty} s_n).$$

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty}$ ei suppene eli raja-arvo $\lim_{n\to\infty} s_n$ ei ole (äärellisenä) olemassa, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu*.

Esimerkki 4.1.5. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ suppenee. Nimittäin osasummalle s_n pätee

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

Siis $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} s_n = 2$.

Esimerkki 4.1.6. Harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu. Perustelu:

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k} > \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

joten

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n+1)$$

ja $\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$.

Lause 4.1.7. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Todistus. $x_n = s_n - s_{n-1}$, joten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0.$$

□

Huom! Lause 4.1.7 antaa välttämättömän ehdon sarjan suppenemiselle. Ehto $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ei kuitenkaan takaa sarjan suppenemista kuten Esimerkki 4.1.6 osoittaa.

Lause 4.1.8. Jos sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}$ suppenevat, niin myös seuraavat sarjat suppenevat ja niiden summille pätee

i) $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k$;

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot x_k = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $a \in \mathbb{R}$ vakio.

Todistus. Seuraa suoraan raja-arvon vastaavista ominaisuuksista. □

Sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty}$ sanotaan *positiivitermiseksi*, jos $x_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sanotaan *suppenevan itseisesti*, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee. Positiivitermisen sarjan suppenemista voidaan tutkia seuraavan majoranttiperiaatteen avulla.

Lause 4.1.9. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee ja $0 \leq x_k \leq y_k \; \forall k \in \mathbb{Z}_+$ (tai $\forall k > n_0 \in \mathbb{Z}_+$), niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Todistus. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ osasummille s_n pätee

$$0 \leq s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} y_k < \infty.$$

Jono (s_n) on siten rajoitettu ja lisäksi kasvava, koska $x_n \geq 0$. Lauseen 4.1.4 nojalla $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \; (\leq \sum_{k=1}^{\infty} y_k)$. □

Seuraus 4.1.10. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu ja $0 \leq x_k \leq y_k \; \forall k \in \mathbb{Z}_+$ (tai $\forall k > n_0 \in \mathbb{Z}_+$), niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu.

Todistus. Kontrapositiolla. □

Seuraus 4.1.11. Jos $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee (ts. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti), niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Todistus. $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k| \implies 0 \leq x_k + |x_k| \leq 2|x_k|$. Nyt $\sum_{k=1}^{\infty} 2|x_k| = 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee (Lause 4.1.8 i)), joten $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + |x_k|)$ suppenee Lauseen 4.1.9 nojalla. Edelleen

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k + |x_k|) - \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

suppenee Lauseen 4.1.8 i) nojalla. □

Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sanotaan geometriseksi, jos suhde $x = x_k/x_{k+1}$ ei riipu k:sta. Geometrinen sarja on siis muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty} ax^k \qquad (a \neq 0).$$

Lause 4.1.12. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} ax^k$ ($a \neq 0$) suppenee, kun $|x| < 1$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}$. Kun $|x| \geq 1$, niin geometrinen sarja hajaantuu.

Todistus. Harj. teht. □

Lause 4.1.13. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ positiiviterminen sarja

i) Jos $\sqrt[n]{x_n} < q < 1 \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{Z}_+$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

ii) Jos $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q < 1 \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{Z}_+$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Todistus. i) Kun $n \geq n_0$, on $x_n < q^n$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ suppenee (kts. Lause 4.1.12), joten väite seuraa majoranttiperaatteesta (Lause 4.1.9).

ii) Arvoilla $n = 1, 2, \ldots, p-1$ epäyhtälöistä $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q$ seuraa kertomalla ne keskenään, että $\frac{x_p}{x_1} < q^{p-1}$ eli $x_p < x_1 q^{p-1}$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_1 \cdot q^{k-1}$ suppenee (Lause 4.1.12) $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee (Lause 4.1.9). □

Seuraus 4.1.14. i) Jos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = q < 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee (itseisesti).

ii) Jos $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = q < 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee (itseisesti).

Vastaavasti Seurauksen 4.1.10 ja Lauseen 4.1.12 nojalla saadaan:

i) Jos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = q > 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ hajaantuu.

ii) Jos $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = q > 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ hajaantuu.

Sarjaa, jonka termit ovat vuorotellen positiivisia ja negatiivisia sanotaan *vuorottelevaksi* eli *alternoivaksi.* Tällainen sarja on muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x_k, \quad x_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

kun sarjan ensimmäinen termi on positiivinen.

Lause 4.1.15. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k$ ($x_k > 0$) alternoiva sarja, jonka termit toteuttavat seuraavat kaksi ehtoa: i) $x_{k+1} < x_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, ja ii) $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Tällöin $\sum_{k=1}(-1)^{k-1}x_k$ suppenee.

Todistus. Ehdon i) nojalla

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - \underbrace{(x_{2n} - x_{2n+1})}_{>0} < s_{2n-1},$$

joten osasummien jonon (s_n) osajono (s_{2n-1}) on vähenevä. Se on selvästi myös alhaalta rajoitettu ($s_{2n-1} > 0$), joten sillä on raja-arvo $S = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$ Lauseen 4.1.4 nojalla. Toisaalta $s_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n}$ ja tässä $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0$ (ehto ii)), joten myös $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = S$. Siten $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. □

4.2 Potenssisarjat

Potenssisarjat ovat muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots).$$

Vakioita a_n, $n \in \mathbb{N}$, kutsutaan *sarjan kertoimiksi* ja lukua x_0 sarjan *kehityskeskukseksi.* Sarjan osasummat ovat muuttujan x polynomeja. Potenssisarja suppenee ainakin arvolla $x = x_0$.

Lause 4.2.1. Jos potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee arvolla x_1 ($x_1 \neq x_0$), niin se suppenee jokaisella arvolla x, jolle $|x-x_0| < |x_1-x_0|$. Jos ko. potenssisarja hajaantuu arvolla $x = x_2$, niin se hajaantuu jokaisella arvolla x, jolle $|x-x_0| > |x_2-x_0|$.

Todistus. Koska $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ suppenee, pätee $\lim_{n\to\infty} a_n(x_1-x_0)^n = 0$ Lauseen 4.1.7 nojalla. Siten $|a_n(x_1-x_0)^n| < M$ $(< \infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, mistä seuraa

$$|a_n(x-x_0)^n| < M \cdot \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} = M \cdot q^n,$$

missä $q = \frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} < 1$. Väitteen alkuosa seuraa siis majoranttiperiaatteesta. Loppuosa saadaan alkuosasta kontrapositiolla. □

Lauseesta 4.2.1 seuraa, että potenssisarjaan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ voidaan liittää ei-negatiivinen reaaliluku R, jolle pätee:

$$\begin{aligned}
&\text{jos } |x-x_0| < R \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ suppenee (itseisesti);}\\
&\text{jos } |x-x_0| > R \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ hajaantuu.}
\end{aligned}$$

Lukua R sanotaan potenssisarjan *suppenemissäteeksi.* Jos $R = 0$, potenssisarja suppenee vain arvolla $x = x_0$ ja jos $R = \infty$, potenssisarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Potenssisarjan suppeneminen/hajaantuminen pisteissä $x_0 \pm R$, kun $0 < R < \infty$, on aina erikseen selvitettävä.

Esimerkki 4.2.2. Geometrisen sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot x^k$ suppenemissäde on $R = 1$ Lauseen 4.1.12 nojalla. (Vrt. myös Lause 4.2.3 alla).

Lause 4.2.3. Jos raja-arvo i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$ tai ii) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ on olemassa, niin se on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenemissäde.

Todistus. Tulos saadaan Seurauksen 4.1.14 avulla. □

Kun $R > 0$, potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$ määrittelee funktion $f :]x_0 - R, x_0 + r[\to \mathbb{R}$.

Lause 4.2.4. Potenssisarjan summa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ on välillä $]x_0 - R, x_0 + r[$ $(R > 0)$ jatkuva ja derivoituva funktio. Lisäksi $f(x)$ voidaan derivoida ja integroida termeittäin:

i) $f'(x) = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$;

ii) $\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$;

kun $|x-x_0| < R$. Näiden sarjojen suppenemissäde on myös R.

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 4.2.5. Kun geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$) derivoidaan termeittäin saadaan arvoilla $|x| < 1$ seuraava tulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Taylorin sarjat: Lauseesta 4.2.4 saadaan seuraava tulos, joka liittää potenssisarjan summafunktion $f(x)$ derivaatat pisteessä $x = x_0$ sarjan kertoimiin.

Lause 4.2.6. Potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$, jonka suppenemissäde $R > 0$, summalla $f(x)$ on kaikkien kertalukujen derivaatat $f^{(k)}(x)$ välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$, jotka saadaan derivoimallla sarja termeittäin k kertaa ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Erityisesti

$$f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(Tässä $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1$ on k:n kertoma.)

Todistus. Derivaattojen $f^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, olemassaolo suppenemisvälillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ seuraa soveltamalla toistuvasti Lauseen 4.2.4 kohdan i) tulosta. Tällöin k. derivaatalle saadaan esitys

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Sijoittamalla tähän $x = x_0$ saadaan $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$. □

Lauseen 4.2.6 nojalla sarjan summa $f(x)$ voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \text{kun } |x-x_0| < R.$$

Tätä sarjaa sanotaan funktion f *Taylorin sarjaksi pisteessä* x_0.

Funktiolle f, jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat jossakin pisteen x_0 ympäristössä, voi yrittää muodostaa sarjakehitelmän sen derivaattojen $f^{(k)}(x_0)$ avulla:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Vaikka tämän potenssisarjan suppenemissäde R olisi > 0, **ei** sen summan (pistettä $x = x_0$ lukuunottamalla) tarvitse yhtyä alkuperäiseen funktioon f. Siksi ko. sarjan suppeneminen kohti funktiota f suppenemisvälillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ on erikseen varmistettava. Usein funktion Tarylorin sarjan voi yrittää muodostaa Lauseen 4.2.4 avulla derivoimallla tai integroimallla termeittäin jo tunnettujen sarjojen summia.

Esimerkki 4.2.7. a) Funktiolla e^x on kaikkien kertalukujen derivaatat: $f^{(n)}(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$. Sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

suppenee (itseisesti) $\forall x \in \mathbb{R}$. Nimittäin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

eli suppenemissäde $R = \infty$ Lauseen 4.2.3 nojalla. Voidaan osoittaa, että $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Siis kyseessä on funktion e^x Taylorin sarja pisteessä $x = 0$. Niinpä esimerkiksi

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots.$$

b) $\sin x$:llä on myös kaikkien kertalukujen derivaatat:

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\quad f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ \dots.$$

Nyt $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, joten pisteessä $x = 0$ saadaan sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

jonka suppenemissäteeksi saadaan $R = \infty$ kuten kohdassa a). Nytkin sarjan summa yhtyy alkuperäiseen funktioon eli $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ on $\sin x$:n Taylorin sarja pisteessä $x = 0$.

c) $\cos x$:n Taylorin sarja saadaan suoraan derivoimalla:

$$\cos x = D \sin x = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

d) Integroimalla geometrinen sarja $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ termeittäin saadaan

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

eli funktion $\ln(1+x)$ Taylorin sarja pisteessä $x = 0$ ja sen suppenemissäteeksi $R = 1$ Lauseen 4.2.3 nojalla. Niinpä esimerkiksi

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots.$$

Taylorin sarjoilla on paljon sovelluksia mm. raja-arvojen laskemisessa, funktioiden approksimoinnissa ja numeerisessa laskennassa.

Luku 5: Differentiaaliyhtälöistä

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaaan yhtälöä, joka sisältää tuntemattoman funktion $y(x)$ ja tämän funktion derivaattoja. Differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi pyritään löytämään kaikki funktiot $y(x)$, jotka toteuttavat annetun yhtälön kaikilla x:n arvoilla. Esimerkiksi

$$y'(x) = \cos x, \quad y''(x) + 2y(x) = 0, \quad y'''(x) + (\sin x)y''(x) + 2xy(x) = 0$$

ovat differentiaaliyhtälöitä.

Differentiaaliyhtälön kertaluku on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku. *Yleinen kertalukua n* oleva differentiaaliyhtälö on muotoa $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, missä F on $(n+2)$:n muuttujan funktio. Jos tästä voidaan ratkaista $y^{(n)}$ päädytään *normaalimuotoiseen* differentiaaliyhtälöön:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Differentiaaliyhtälön *yleinen ratkaisu* sisältää kaikki funktiot $y(x)$, jotka toteuttavat ko. yhtälön kaikilla x:n arvoilla. Jos differentiaaliyhtälön kertaluku on n, niin sen yleinen ratkaisu sisältään n toisistaan riippumatonta vakiota $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Kun näille vakioille $C_1, C_2, \ldots, C_n$ kiinnitetään määrätyt arvot, saadaan differentiaaliyhtälön *yksityisratkaisu*.

Esimerkki 5.0.8. Differentiaaliyhtälön $y' = \cos x$ yleinen ratkaisu on $y(x) = \sin x + C$, missä $C \in \mathbb{R}$ on integroimisvakio. Tämä seuraa integraalilaskennan peruslauseesta (Lause 2.8.4). Yhtälön yksityisratkaisuja ovat mm. $y(x) = \sin x + 1$ ja $y(x) = \sin x - 3$.

5.1 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Tarkastellaan 1. kertaluvun normaalimuotoista differentiaaliyhtälöä

$$y'(x) = f(x, y).$$

Yhtälön *yleinen ratkaisu* välillä I ($I \subset \mathbb{R}$) sisältää välillä I derivoituvat funktiot $x \to y(x, C)$, missä C on määräämätön vakio. Vakio C voidaan määrätä *alkuehdosta* $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, jolloin saadaan ko. alkuehdon täyttävä *yksityisratkaisu*. Tällöin puhutaan *alkuarvotehtävästä*:

$$y'(x) = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

jolla on siis vain (korkeintaan) yksi ratkaisu. Käsittelemme 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisemista kolmassa eri tapauksessa.

1) Tapaus $y' = f(x)$: Nyt yhtälön yleinen ratkaisu saadaan suoraan integraalilaskennan peruslauseen (Lause 2.8.4) avulla:

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

Alkuarvotehtävän $y'(x) = f(x)$; $y(x_0) = y_0$ ratkaisu on

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + y_0$$

differentiaali- ja integraalilaskennan päälauseen (Lause 3.3.5) nojalla.

2) Tapaus $y' = h(y)$: Jos $h(y_0) = 0$ jollakin y_0, niin vakiofunktio $x \to y_0$ on selvästi differentiaaliyhtälön eräs ratkaisu. Oletetaan, että h on jatkuva ja $\neq 0$ välillä I. Tällöin $x \to y(x)$ on aidosti monotoninen välillä I ja sillä on käänteisfunktio $y \to x$, jonka derivaatalla pätee (Lause 2.6.5):

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{h(y)}.$$

Tästä saadaan yleinen ratkaisu y:n kääteisfunktiolle

$$x = x(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} + C.$$

Alkuperäisen yhtälön $y' = h(y)$ ratkaisut saadaan nyt näiden integraalifunktioiden $y \to x(y)$ ($x'(y) \neq 0$) kääteisfunktioina $x \to y(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = h(y) = h(y(x)).$$

Lyhyesti:

$$y' = h(y) \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(y) \iff \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \mathrm{d}x \ (h(y) \neq 0) \iff \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} + C = x.$$

Esimerkki 5.1.1. Ratkaistaan yhtälö $y' = y^2$. Vakiofunktio $x \to 0$ on selvästi eräs ratkaisu. Arvoilla $y \neq 0$ saadaan

$$y' = y^2 \iff \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x \iff \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} + C = x \iff x = -\frac{1}{y} + C,$$

mistä ratkaisut saadaan käänteisfunkioina $y(x) = \frac{1}{C-x}$.

3) Tapaus $y' = h(y) \cdot g(x)$ eli separoituva differentiaaliyhtälö: Tässä funktion $f(x, y)$ muuttujat x ja y voidaan erottaa eli separoida: $f(x, y) = h(y) \cdot g(x)$. Jos $h(y_0) = 0$, niin jälleen vakiofunktio $x \to y_0$ antaa erään ratkaisun. Oletetaan nyt, että h ja g ovat jatkuvia ja $h \neq 0$ välillä I. Yleisen ratkaisun löytämiseksi separoidaan muuttujat ja integroidaan:

$$y' = f(x, y) \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(y)g(x) \iff \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x \iff \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x + C.$$

Vasemmalla puolella olevalle integraalifunktiolle $H(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}$ pätee $H'(y) = \frac{\mathrm{d}H(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{h(y)} \neq 0$, joten sillä on käänteisfunktio H^{-1} ja saatu yhtälö

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x + C = G(x)$$

voidaan ratkaista y:n suhteen: $y = H^{-1}(G(x)) = (H^{-1} \circ G)(x)$, jolloin saadaan alkuperäisen yhtälön ratkaisut x:n funktiona $y = y(x)$.

Vastaavasti *alkuarvotehtävän* $y' = h(y) \cdot g(x)$; $y(x_0) = y_0$, ratkaisu saadaan ratkaisemalle yhtälö

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)} = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

muuttujan y suhteen.

Esimerkki 5.1.2. Ratkaistaan alkuarvotehtävä $y' = e^{-y}x$; $y(0) = 0$.

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}s}{e}^{-s} = \int_0^x t\mathrm{d}t \iff \int_0^y e^s \mathrm{d}x = \int_0^x t\mathrm{d}t \iff /_0^y e^s = /_0^x \frac{t^2}{2} \iff e^y - e^0 = \frac{x^2}{2}$$

$$\iff e^y = \frac{x^2}{2} + 1 \iff y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + 1\right).$$

5.2 Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots P_1(x)y' + P_0(y) = Q(x),$$

missä $P_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots n$, ja $Q(x)$ ovat yhtälön kertoimia, jotka ovat tunnettuja funktioita. Tarkastelemme tässä yksityiskohtaisesti vain 1. ja 2. kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista; samat periaateet soveltuvat myös korkeampaa kertalukua olevien lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

1. kertaluvun normaalimuotoinen lineaarinen differentiaaliyhtälö:

Ko. yhtälö on muotoa

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \tag{5.1}$$

missä kertaimet $p(x)$ ja $q(x)$ oletetaan jatkuviksi välillä I. Asettamalla $q(x) = 0\ \forall x \in I$ saadaan yhtälöä (5.1) vastaava *homogeeninen yhtälö:*

$$y' + p(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Alkuperäistä yhtälöä ($q \neq 0$) kutsutaan vastaavasti *epähomogeeniseksi.* Homogeeninen yhtälö on separoituva, joten sen ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$y' + p(x)y = 0 \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\mathrm{d}x + C_1 \iff \ln|y| = -\int p(x)\mathrm{d}x + C_1$$

$$\iff |y| = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x + C_1} \iff y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

missä $C = \pm e^{C_1}$. Epähomogeenisen yhtälön (5.1) ratkaisun antaa

Lause 5.2.1. Differentiaaliyhtälön $y' + p(x)y = q(x)$, missä p ja q ovat jatkuvia funktioita välillä I yleinen ratkaisu on

$$y(x) = e^{-h(x)}\left(C + \int e^{h(x)}q(x)\mathrm{d}x\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

missä $h(x) = \int p(x)\mathrm{d}x$.

Todistus. Se, että ko. funktiot ovat differentiaaliyhtälön ratkaisuja todetaan derivoimalla annettu $y(x)$:n lauseke (harj. teht.). Käänteisen väitteen palautamme vastaavaan homogeeniseen yhtälöön: Olkoot $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ kaksi epähomogeenisen yhtälön ratkaisua, jolloin

$$\begin{cases} y_1'(x) + p(x)y_1(x) = q(x); \\ y_2'(x) + p(x)y_2(x) = q(x); \end{cases} \implies (y_1'(x) - y_2'(x)) + p(x)(y_1(x) - y_2(x)) = 0.$$

Siten erotus $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ on vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu eli $y_1(x) - y_2(x) = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$. Alkuosan nojalla $y_2(x) = e^{-h(x)} \cdot \int e^{(h(x)}q(x)\mathrm{d}x$ on eräs epähomogeenisen yhtälön ratkaisu, jolloin $y_1(x) = Ce^{-h(x)} + y_2(x)$ on vaadittua muotoa. □

Huom! Kääntäen, jos $y_0(x)$ on eräs epähomogeenisen yhtälön ratkaisu ja $y(x)$ on vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu, on niiden summa $y_0(x)+y(x)$ epähomogeenisen yhtälön ratkaisu. Näin ollen yhtälön (5.1) yleisen ratkaisun löytämiseksi riittää etsiä yksi epähomogeenisen yhtälön ratkaisu $y_0(x)$ ja lisätä se vastaavan homogeenisen yhtälön yleiseen ratkaisuun:

$$\underbrace{y(x)}_{\text{epähomog. yht. yleinen ratk.}} = y_0(x) + \underbrace{Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{\text{homog. yht. yleinen ratk.}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 5.2.2. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $y' + 2y = x + 1$. Homogeenisen yhtälön $y' + 2y = 0$ yleinen ratkaisu on $y(x) = Ce^{-\int 2\mathrm{d}x} = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Helposti todetaan, että $y_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ on eräs epähomogeenisen yhtälön ratkaisu. Siten epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on:

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö: Ko. yhtälö on muotoa

$$y'' + ay' + by = q(x), \tag{5.2}$$

missä a ja b ovat vakioita. Vastaava homogeeninen yhtälö on nyt muotoa

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Pyrimme löytämään sille muotoa $x \to e^{rx}$ olevan ratkaisufunktion:

$$y(x) = e^{rx} \implies \begin{cases} y'(x) = re^{rx}; \\ y''(x) = r^2e^{rx}. \end{cases}$$

Siten

$$y'' + ay' + by = (r^2 + ar + b)e^{rx}$$

ja tehtävänä on selvittää yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juuret. Tätä yhtälöä sanotaan differentiaaliyhtälöön (5.2) liittyväksi *karakteristiseksi yhtälöksi.* Sen juurien r_1 ja r_2 avulla vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan seuraavasti.

Lause 5.2.3. Olkoot r_1 ja r_2 karakteristisen yhtälön juuret. Tällöin yhtälön $y'' + ay' + by = 0$ yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

missä

i) $\begin{cases} y_1(x) = e^{r_1 x}; \\ y_2(x) = e^{r_2 x}, \end{cases}$ jos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ja $r_1 \neq r_2$;

ii) $\begin{cases} y_1(x) = e^{rx}; \\ y_2(x) = xe^{rx}, \end{cases}$ jos $r_1 = r_2 = r \ (= -\frac{a}{2}) \in \mathbb{R}$;

iii) $\begin{cases} y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \end{cases}$ jos $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta; \\ r_2 = \alpha - i\beta. \end{cases}$ $(i^2 = -1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \beta \neq 0)$

Kaikki Lauseessa 5.2.3 esiintyvät funktiot todetaan yhtälöä (5.2) vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisuiksi suoraan derivoimalla. Käänteistä väitettä emme perustele. Kuten 1. kertoluvun lineaarisen yhtälön tapauksessa saadaan epähomogeenisen yhtälön (5.2) yleinen ratkaisu Lauseen 5.2.3 avulla, kunhan yhtälölle (5.2) löydetään jokin ratkaisu $y_0(x)$.

Seuraus 5.2.4. Epähomogeenisen yhtälön (5.2) yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

missä $y_0(x)$ on yhtälön (5.2) jokin ratkaisu ja $y_1(x)$, $y_2(x)$ ovat vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisuja kuten Lauseessa 5.2.3.

Huom. 1. Lauseessa 5.2.3 $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat toisistaan lineaarisesti riippumattomia. Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaatioina ja ratkaisuavaruus on 2-ulotteinen vektoriavaruus.

Huom. 2. Karakteristista yhtälöä voidaan soveltaa myös lineaaristen vakiokertoimisten kertalukua $k \in \mathbb{N}$ olevien homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Muotoa $y = e^{rx}$ oleva ratkaisufunktio johtaa tällöin astetta k olevan karakteristisen polynomin nollakohtien (k kpl) etsimiseen. Esimerkiksi Esim. 5.2.2:ssa esiintyvää homogeeniyhtälöä $y' + 2y = 0$ vastaa karakteristinen yhtälö $r + 2 = 0$, jonka juuri $r = -2$ antaa ratkaisuksi funktiot Ce^{-2x}, $C \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 5.2.5. a) $y'' - y = 0$. Karakt. yhtälö: $r^2 - 1 = 0$. Juuret: $r_1 = 1$ ja $r_2 = -1$. Siis yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

b) $y'' - 2y' + y = 0$. Karakt. yhtälö: $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0 \iff r_1 = r_2 = 1$. Siis yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

c) $y'' + 4y' + 5 = 0$. Karakt. yhtälö: $r^2 + 4r + 5 = 0 \iff (r+2)^2 + 1 = 0 \iff r = -2 \pm i$. Siis yleinen ratkaisu on

$$y(x) = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 5.2.6. Ratkaistaan epähomogeeninen yhtälö $y''+2y'+y = 2x^2$. Homogeeninen yhtälö on $y''+2y'+y = 0$, karakteristinen yhtälö: $r^2+2r+1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0 \iff r_1 = r_2 = -1$. Siis homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Löytääksemme epähomogeeniselle yhtälölle jonkin ratkaisun tehdään muotoa $y(x) = Ax^2 + Bx+C$ oleva yrite. Tällöin $y'(x) = 2Ax+B$ ja $y''(x) = 2A$. Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan:

$$2A + 2 \cdot (2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 \iff \begin{cases} A = 2; \\ B = -8; \\ C = 12. \end{cases}$$

Niinpä $y_0(x) = 2x^2 - 8x + 12$ on eräs epähomogeenisen yhtälön ratkaisu. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y(x) = 2x^2 - 8x + 12 + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Seurauksen 5.2.4 mukaan epähomogeenisen differentiaaliyhtälön (5.2) yleinen ratkaisu saadaan etsimällä ko. yhtälölle yksi ratkaisufunktio $y_0(x)$, joka lisätään vastaavan homogeeniyhtälön yleiseen ratkaisuun, joka on esitetty Lauseessa 5.2.3. Yksi ratkaisu pyritään usein löytämään sopivan yritteen avulla.

Seuraava taulukko antaa esimerkkejä sopivista yritteistä $y_0(x)$ epähomogeenitermin $q(x)$ muodon mukaan:

epähomogeenitermi $q(x)$:	*yritteen $y_0(x)$ muoto:*	
kx^n	$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$	$(c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$
ke^{ax}	c_1e^{ax} tai c_2xe^{ax}	$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$k\cos(bx)$	$c_1\sin(bx) + c_2\cos(bx)$	$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$k\sin(bx)$	$c_1\sin(bx) + c_2\cos(bx)$	$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$ke^{ax}\cos(bx)$	$e^{ax}\left(c_1\sin(bx) + c_2\cos(bx)\right)$	$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$ke^{ax}\sin(bx)$	$e^{ax}\left(c_1\sin(bx) + c_2\cos(bx)\right)$	$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Kun yritteen $y_0(x)$ muoto on kiinnitetty, lasketaan $y_0'(x)$ ja $y_0''(x)$ ja sijoitetaan yhtälöön (5.2), jonka jälkeen syntyneestä yhtälöstä pyritään yritteen $y_0(x)$ kertoimille $c_i \in \mathbb{R}$ ratkaisemaan arvot, joilla yhtälö (5.2) saadaan voimaan; vertaa Esimerkki 5.2.6.

Kun epähomogeenisen differentiaaliyhtälön (5.2) yleinen ratkaisu on saatu selville, voidaan siinä esiintyvien parametrien C_1 ja C_2 arvot kiinnittää asettamalla ratkaisufunktiolle $y(x)$ lisäehtoja, tyypillisesti ns. alkuarvo- tai reuna-arvoehtoja.

Esimerkki 5.2.7. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y'' + 2y' + y = 2x^2; \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \tag{5.4}$$

Edellisen esimerkin mukaan differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' + y = 2x^2$ yleinen ratkaisu saadaan lausekkeena (5.3). Koska $y'(x) = 4x - 8 - C_1e^{-x} + C_2(e^{-x} - xe^{-x})$ saadaan alkuarvoehdoista $y(0) = 2, y'(0) = 3$ yhtälöpari

$$\begin{cases} 2 = y(0) = 12 + C_1 \\ 3 = y'(0) = -8 - C_1 + C_2(1 - 0) \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -10 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Niinpä alkuarvotehtävän (5.4) ainoa ratkaisu on funktio $y(x) = 2x^2 - 8x + 12 - 10e^{-x} + xe^{-x}$.

Huom! Kun differentiaaliyhtälö on ratkaistu, on ratkaisun oikeellisuus hyvä tarkistaa derivoimalla ratkaisufunktiot ja sijoittamalla derivaattojen arvot alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön; samalla on hyvä tarkistaa myös alkuarvoehtojen toteutuminen, jos kyseessä on alkuarvotehtävä.

Luku 6: Kompleksiluvuista

6.1 Kompleksiluvut

Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ muodostuu luvuista $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja i on *imaginaariyksikkö*, jolle pätee $i^2 = -1$. Kompleksiluvut voidaan ajatella *reaalilukupareina* (x, y) ja havainnollistaa vektoreina *kompleksitasossa*, jolloin erityisesti $i = (0, 1)$. Luvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *reaaliosa* on x ja *imaginaariosa* on y.

Laskutoimitukset. Kompleksiluvuille voidaan määritellä *yhteen- ja kertolasku*. Kompleksilukujen $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ summa on

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

ja tulo on

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Yhteenlaskulla on seuraavat ominaisuudet:

(i) (liitännäisyys) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

(ii) (vaihdannaisuus) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

(iii) on olemassa nolla-alkio $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$, jolle pätee: $z + 0 = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;

(iv) jokaisella $z = x+iy \in \mathbb{C}$ on olemassa vasta-alkio $-z = -x+i(-y) = -x-iy$ ts. $z+(-z) = 0$.

Kertolaskulla on ominaisuudet:

(i) (liitännäisyys) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

(ii) (vaihdannaisuus) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

(iii) (osittelulaki) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$;

(iv) on olemassa ykkösalkio $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$, jolle pätee: $1 \cdot z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;

(v) jokaiselle $z \neq 0$ on olemassa käänteisluku $z^{-1} = \frac{1}{z}$, jolle pätee $z^{-1} z = 1$.

Itse asiassa, jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, niin

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy$ *liittoluku eli kompleksikonjugaatti* on $\overline{z} = x - iy$. Liittoluvulla on ominaisuudet

(i) $\overline{(\overline{z})} = z$;

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

(iv) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$.

Liittoluvun avulla $z = x + iy$:n *reaali- ja imaginaariosa* saadaan seuraavasti

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{ja} \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Napakoorinaattiesitys. Kompleksiluku voidaan esittää *napakoorinaattien avulla* muodossa

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Pituutta $r = |z|$ sanotaan kompleksiluvun z *moduliksi* ja kulmaa $\phi = \arg z$ sen *argumentiksi.* Näille pätee

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}\,;$$
$$\phi = \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \operatorname{Re} x \geq 0; \\ \pm\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \operatorname{Re} x < 0. \end{cases}$$

Vaihtoehtoisesti

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Moduli on ei-negatiivinen reaaliluku ja argumentti puolestaan on 2π:n monikerran tarkkuudella määritelty reaaliluku, kun $z \neq 0$. Usein argumentti rajataan välille $0 \leq \arg z < 2\pi$ tai välille $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Esimerkki 6.1.1. Liittoluku napakoordinaateissa:

$$\overline{z} = x - iy = r\cos\phi - ir\sin\phi = r\left(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)\right).$$

Erityisesti $|\overline{z}| = r = |z|$ ja $\arg(\overline{z}) = -\phi = -\arg(z)$.

Kompleksilukujen summaa $z_1 + z_2$ vastaa kompleksitasossa vektoriyhteenlasku. Kompleksilukujen tuloa $z_1 z_2$ voi puolestaan havainnollistaa kompleksitasossa napakoordinaattiesityksen avulla. Asian selvittämiseksi tarkastellaan tulon $z_1 z_2$ napakoordinaattiesitystä.

Tulo ja osamäärä napakoordinaateissa: Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat:

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2) + \cos(\phi_1)\sin(\phi_2);$$
$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2).$$

Esitetään kompleksiluvut z_1 ja z_2 napakoordinaateissa:

$$z_1 = r_1\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right).$$

Tällöin tulolle z_1z_2 saadaan napakoordinaattiesitys

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1\,(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot r_2\,(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\
&= r_1r_2\big(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) + i\,(\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \sin(\phi_1)\cos(\phi_2))\big) \\
&= r_1r_2\big(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\big).
\end{aligned}$$

Niinpä

$$\begin{aligned}
|z_1z_2| &= r_1r_2 = |z_1|\cdot|z_2| \\
\arg(z_2z_2) &= \phi_1 + \phi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.
\end{aligned}$$

Vastaavasti johdetaan osamäärän napakoordinaattiesitys: Kun $z_2 \neq 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} &= \frac{r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))\cdot r_2\,(\cos(-\phi_2) + i\sin(-\phi_2))}{r_2^2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right).
\end{aligned}$$

Niinpä

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{ja} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Esimerkki 6.1.2. Lasketaan luvun $z_0 = \frac{i}{1+i\sqrt{3}}$ reaali- ja imaginaariosa sekä moduli ja argumentti.

$$\frac{i}{i+i\sqrt{3}} = \frac{i(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{i+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.$$

Siten $\operatorname{Re} z_0 = \sqrt{3}/4$ ja $\operatorname{Im} z_0 = 1/4$. Toisaalta z_0:n moduli on

$$|z_0| = \left|\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{|i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$$

ja argumentti on

$$\arg z_0 = \arg\left(\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(i) - \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Siis

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Esimerkki 6.1.3. Olkoot $z_1 = -2+2i$ ja $z_2 = 3i$. Tällöin

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (-2+2i)(3i) = -6-6i, \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{-2+2i}{3i} = \frac{(-2+2i)(-3i)}{3i\cdot(-3i)} = \frac{2+2i}{3} = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3}, \\
|z_1z_2| &= \sqrt{(-6)^2+(-6)^2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{8}\cdot 3 = \sqrt{(-2)^2+2^2}\sqrt{(-3)^2} = |z_1|\cdot|z_2|, \\
\arg(z_1) &= \frac{3\pi}{4}, \quad \arg(z_2) = \frac{\pi}{2}, \\
\arg(z_1z_2) &= -\frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi, \\
\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{\pi}{4} = \arg(z_1) - \arg(z_2).
\end{aligned}$$

Tulon modulin ja argumentin kaavat yleistyvät n:n luvun tulolle. Jos $z = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$, niin

$$|z| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \quad \text{ja} \quad \arg(z) = \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i).$$

Jos tässä valitaan $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, saadaan ns. *de Moivre'n kaava*:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

Jos erityisesti $|z| = 1$, niin

$$z^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Napakoordinaattiesitys on hyödyllinen myös ratkaistaessa polynomiyhtälöitä. Tarkastellaan erikoistapausta $z^n = w$, jolloin $z = \sqrt[n]{w}$; ts. on etsittävä luvun $w \in \mathbb{C}$ kaikki n-juuret kompleksitasossa. Olkoot

$$w = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \quad \text{ja} \quad z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

$r, \rho \geq 0$. Tällöin

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos(\phi + i\sin(\phi)) = w,$$

joten

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{ja} \quad n\theta = \phi + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

eli

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{ja} \quad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Erisuuret juuret saadaan arvoilla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ja ratkaisuksi saadaan n *kappaletta luvun* w n*-juuria*:

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Kun $|w| = 1$, nähdään, että juuret $\sqrt[n]{w}$ sijaitsevat kompleksitason yksikköympyrän kehällä ja määräävät tasasivuisen n-monikulmion, jonka kärjet ovat pisteissä

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Kompleksilukujen eräänä tärkeänä ominaisuutena on, että jokaisella (reaali- tai kompleksikertoimisella) n:n asteen ($n > 0$) polynomilla on täsmälleen n kappaletta juuria kompleksilukujen joukossa monikerrat huomioiden. [Algebran peruslause.]

6.2 Eksponenttifunktio kompleksitasossa

Eksponenttifunktio kompleksitasossa määritellään kaavalla

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{6.1}$$

Kun $z = \operatorname{Re} z = x$, saadaan tavallinen reaaliakselilla määritelty eksponenttifunktio. Kun $z = iy$, saadaan

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \quad \text{(Eulerin kaava)}$$

Kun z esitetään napakoordinaateissa $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, saadaan jokaiselle kompleksiluvulle $z \neq 0$ seuraava esitys eksponenttifunktion avulla

$$z = |z|e^{i\phi} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\phi} = e^{\ln|z|+i\phi}, \quad |z| > 0. \tag{6.2}$$

Esimerkkejä: $e^{2\pi i} = e^0 = 1$, $e^{\pm\pi i} = -1$, $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ja $e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$.

Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista seuraa

$$\begin{aligned} e^{iy_1}e^{iy_2} &= (\cos(y_1) + i\sin(y_1))(\cos(y_2) + i\sin(y_2)) \\ &= (\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2)) + i(\sin(y_1)\cos(y_2) + \cos(y_1)\sin(y_2)) \\ &= \cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2) = e^{i(y_1+y_2)}. \end{aligned}$$

Tämän nojalla e^z toteuttaa myös kompleksitasossa kaavan

$$e^{z_1 z_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Kääntäen: Kaavasta $e^{z_1 z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ seuraa sekä sinin että kosinin yhteenlaskukaavat huomioimalla Eulerin kaava (arvoilla $z_1 = iy_1$, $z_2 = iy_2$; katso yllä olevan kaavan johto).

Sini- ja kosinifunktion jaksollisuudesta seuraa, että e^z on $2\pi i$-jaksollinen funktio,

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Siten e^z saavuttaa kaikki arvonsa jo ns. jaksovyössään $-\pi < y \leq \pi$, $x \in \mathbb{R}$.

Huom. Selvästi $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, sillä $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Toisaalta kaavan (6.2) nojalla kaikki arvot $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kuuluvat e^z:n arvojoukkoon.

Huom. Eksponenttifunktion määritelmästä (6.1) nähdään, että $e^z = e^x e^{iy}$ kompleksitason pisteessä $z = x + iy$ määräytyy olennaisesti sen arvoista imaginaariakselilla $z = iy$ eli Eulerin kaavasta. Palautetaan mieleen reaaliakselilla määriteltyjen funktioiden e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ Taylor-sarjakehitelmät:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Korvaamalla e^x:n Taylor-sarjakehitelmässä luku x imaginaariluvulla iy ja huomioimalla, että

$$(iy)^n = \begin{cases} y^n, & n = 4k \\ iy^n, & n = 4k+1 \\ -y^n, & n = 4k+2 \\ -iy^n, & n = 4k+3 \end{cases}$$

todetaan, että

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}) = \cos y + i\sin y,$$

mikä osaltaan selittää e^z:n määritelmän (6.1) ja Eulerin kaavan sisällön.