

Matematiikan peruskurssi (2019)

Harjoitus 2/viikko 44

1. Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ kuvauksia. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Perustelu!

(i) f ja g injektioita (surjektioita) $\implies g \circ f$ injektio (surjektio)

(ii) $g \circ f$ injektio $\implies f$ ja g injektioita

(iii) $g \circ f$ bijektio $\implies f$ injektio ja g surjektio

2. Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, kun

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{2x - x^2} - \frac{1}{2x}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x}.$$

3. Laske toispuoleiset raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x}.$$

4. Olkoon kuvaus $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ määritelty lausekkeella

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

a) Onko f (aidosti) kasvava, kun $x < 0$ tai $x > 0$?¹ b) Onko f surjektio tai injektio?

5. Olkoot $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita, joille pätee

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{kun } 0 < |x - x_0| < \varepsilon_0,$$

missä $\varepsilon_0 > 0$ (kiinteä). Todista seuraava *litistysperiaate*: Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, niin myös $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

6. Funktio $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $|g(x) - \sqrt{2}| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Onko funktiolla $g(x)$ raja-arvoa pisteessä $x = 0$?

b) Onko raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \sqrt{2}}{x}$ olemassa?

Laske kyseiset raja-arvot, mikäli ne ovat olemassa.

c) Selvitä onko funktio $g(x)$ (i) jatkuva, (ii) derivoituva pisteessä $x = 0$.

¹Funktio f on kasvava (vähenevä) välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{vastaavasti } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)),$$

f on aidosti kasvava (aidosti vähenevä) välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{vastaavasti } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)).$$