

Matematiikan peruskurssi (2019)

Harjoitus 4/viikko 46

1. Funktion g derivaatta on $g'(x) = \ln |x|$, kun $x \neq 0$. Laske $f'(x)$ kun

$$\text{a) } f(x) = g(e^x), \quad \text{b) } f(x) = g(e^{\sin x}).$$

2. a) Selvitä onko funktiolla $f(x) = x^3 + 2x + 5$ olemassa käänteisfunktio koko määrittelyjoukossaan $x \in \mathbb{R}$. (Vihje: laske $f'(x)$.)

b) Laske funktion ($y =$) $f(x) = x^3 + 2x + 5$ käänteisfunktion f^{-1} derivaatta pisteessä $y = 2$.

3. Laske l'Hospitalin säännön avulla seuraavat raja-arvot

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - (\ln x)^2}{1 - \ln x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \ln x,$$

4. Selvitä funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kaikki (lokaalit) ääriarvopisteet sekä mahdolliset maksimi- ja minimiarvot $\mathbb{R}$:ssä.

5. a) Esti kaikki ratkaisut $x \in \mathbb{R}$ yhtälölle

$$\sin x = x.$$

b) Osoita, että

$$\frac{|\sin x|}{|x|} < 1, \quad \text{kun } x \neq 0.$$

c) Selvitä onko funktiolla $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, maksimi- tai minimiarvoa kuvajoukossaan.

Vihje: Sovella väliarvolausetta funktioon $\sin x$ välillä $[0, x]$.