

## Matematiikan peruskurssi (2019)

Harjoitus 9/viikko 51

**Huom. Kurssin 2. välikoe on keskiviikkona 18.12.2019, klo 12:00-14:00. Sali F118.**

**Koealue: Luentomonisteen luvut 4-6 sekä harjoitukset 6-9.**

1. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  sekä derivaatat  $f'(0)$  ja  $f''(0)$   $\cos x$ :n pisteessä  $x = 0$  kehitetyin Taylorin sarjan avulla.

2. Koko  $\mathbb{R}$ :ssä suppeneva potenssisarja  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  toteuttaa ehdot  $f(0) = 0$  ja  $f'(0) = 1$  sekä differentiaaliyhtälön

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Määritä näistä ehdoista ko. sarjan kertoimet rekursiivisesti. Mikä funktio on sarjan summa  $f(x)$ ?

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(x^2 + 3)y' = xy.$$

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' + 2y = 2 \cos x; \quad y(0) = 1.$$

5. Olkoon  $R \geq 0$  vakio. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + Ry' - y = e^{-x}; \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$R$ :n arvoilla  $R = 100$ ,  $R = 0.1$  ja  $R = 0$ .