

Matemaattiset menetelmät I (2011)

Harjoitus 9/viikko 48

Huom. 1. Kurssin 2. välikoe on To: 1.12.2011, 10:00-12:00 F141 (luentosali, koe alkaa tasan klo 10:00). Koealue: Luentomuistiinpanojen sivuihin 25–48 (luvut 2.10–3.5) liittyvät asiat sekä koealueeseen liittyvät harjoitustehtävät harjoituksista 5–7.

Huom.2. Laskupaja Ma 28.11.2011, klo 8–10, sali D102.

1. Määritä sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{3}\right)^k$$

suppenemissäde sekä kaikki arvot $x \in \mathbb{R}$, joilla kyseinen sarja suppenee.

2. Selvitä millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$) seuraava sarja suppenee:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} (\ln |x|)^k.$$

(*Vihje:* Laske ensin sarjan suppenemissäde.)

3. Muodosta Taylorin sarjakehitelmä integraalifunktiolle

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

kehityskeskuksena origo $x_0 = 0$.

4. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ sekä derivaatat $f'(0)$ ja $f''(0)$ $\cos x$:n pisteessä $x = 0$ kehitetyn Taylorin sarjan avulla.

5. Muodosta Taylorin sarjakehitelmä kompleksiarvoiselle funktiolle

$$\cos x + i \sin x,$$

missä i on imaginaariyksikkö ($i^2 = -1$) ja kehityskeskuksena on origo $x_0 = 0$. Vertaa tulosta e^{ix} :n sarjakehitelmään, joka saadaan korvaamalla luku x luvulla ix funktion e^x :n Taylorin sarjassa.

6. Koko \mathbb{R} :ssä suppeneva potenssisarja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ sekä differentiaaliyhtälön

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Määritä näistä ehdoista ko. sarjan kertoimet rekursiivisesti. Mikä funktio on sarjan summa $f(x)$?

7. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

$$\text{a) } y' + y = 0, \quad \text{b) } y'' + y' = 0, \quad \text{c) } y'' + y = 0.$$