MATH2040 OPTIMOINNIN ERIKOISKURSSI — KEVÄT 2010

HARJOITUS 1 — 13.1.2010

Nämä harjoitukset liittyvät raja-arvoihin ja derivointiin (Wayne Winstonin osion 11.1 alkupää).

1. (a) Laske raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{42h + 7h^2 + 2h^3}{h}.$$

(b) Miten (a)-kohdan raja-arvo liittyy derivaattoihin?

a) $\lim_{h\to 0} \frac{42h+7h^2+2h^3}{h} = \lim_{h\to 0} (42 + 7h + 2h^2) = 42$

b) 1) On $f'(0)$, kun $f(x) = 42x + 7x^2 + 2x^3$

(On myös $g'(1)$, kun $g(x) = 2x^3 + x^2 + 34x$)

2) raja-arvo voidaan määrittää l'Hospitalin säännöllä

$\lim_{h\to 0} \frac{42h + 7h^2 + 2h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{42 + 14h + 6h^2}{1}$

$= \underline{42}$

2. Olkoon $f(x) = x^2$. Laske derivaatta $f'(0)$ käyttämällä derivaatan määritelmää erotusosamäärän raja-arvona.

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$

3. Laske seuraavien funktioiden derivaatat.

(a)

$$f(x) = xe^{-x},$$

(b)

$$f(x) = e^{-x^2/2},$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

$f'(x) = (Dx)\, e^{-x} + x \cdot D(e^{-x})$ tulon deriv. s.

$= 1 \cdot e^{-x} + x\, e^{-x} \cdot (-1)$

$= (1-x)\, e^{-x}$

b) $f(x) = e^{-x^2/2} = u(s(x))$

$f'(x) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$ yhdistetyn funktion d.s.

$= e^{-x^2/2} \cdot (-x)$

$= -x\, e^{-x^2/2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} = u \cdot (v^{-1})$

$f'(x) = Du \cdot (v^{-1}) + u \cdot D(v^{-1})$

$= 2x \cdot \dfrac{1}{(x^2-1)} + x^2 \cdot (-1) \dfrac{1}{(x^2-1)^2} \cdot 2x$

$= \dfrac{2x(x^2-1) - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

(II tapa) $f(x) = \dfrac{x^2-1+1}{x^2-1} = 1 + (x^2-1)^{-1}$

$f'(x) = -1 \cdot (x^2-1)^{-2} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

4. Mitkä seuraavista funktioista ovat jatkuvia tai derivoituvia pisteessä $x = 1$?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 1, \\ x-1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x}{x-1},$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} 0 = 0 \\ \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x-1) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$\to$ f on jatkuva pisteessä $x = 1$

Erotusosamäärä

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \begin{cases} \frac{0-0}{h} = 0, & \text{kun } h < 0 \\ \frac{(1+h)-1}{h} = 1, & \text{kun } h > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$\to$ f ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1-} \frac{x}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \to 1+} \frac{x}{x-1} = +\infty \end{array}\right\}$$ f ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$

$\to$ f ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$

Myös $f(1)$ on epäselvä

c) Kun $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1$$

Sovitaan, että

$$f(1) = 1+1 = 2$$

Silloin

$$f(x) = x+1 \quad \forall x$$

$\longrightarrow$ f on jatkuva ja derivoituva pisteessä $x=1$

5. Perustele seuraavat väitteet:

(a) Funktion jatkuvuudesta ei seuraa sen derivoituvuutta.
(b) Funktion derivoituvuudesta seuraa sen jatkuvuus.
(c) Jos funktio ei ole jatkuva, niin se ei ole derivoituva.

(a) Perusteluksi riittää yksi funktio joka on jatkuva mutta ei derivoituva (jossakin pisteessä)

Tehtävän 4a funktio on jatkuva mutta ei derivoituva pisteessä $x=1$

(b) Olkoon $f(a) = b$ ja $f'(a) = c$

eli $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = c$

merkitään $g(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(\to c)$

valitaan $\varepsilon > 0$

Siitä, että $\lim_{h \to 0} g(h) = c$ seuraa, että

on olemassa δ, $\frac{\varepsilon}{2c} > \delta > 0$, $1 > \delta$, siten että

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x-a) - c| < \varepsilon/2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(x)-b}{x-a} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x)-b| < |c||x-a| + \frac{\varepsilon}{2}|x-a|$$

$$\Rightarrow |f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b = f(a)$$

$\Rightarrow$ f on jatkuva pisteessä $x = a$

c) Sama väite kuin kohdassa (b), joten ei tarvita uutta perustelua

Huom: $A \Rightarrow B$ sama kuin
ei A tai B sama kuin
ei $B \Rightarrow$ ei A