

Nämä harjoitukset liittyvät raja-arvoihin ja derivointiin (Wayne Winstonin osion 11.1 alkupää).

1. (a) Laske raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{42h + 7h^2 + 2h^3}{h}$$

- (b) Miten (a)-kohdan raja-arvo liittyy derivaattoihin?

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{42h + 7h^2 + 2h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (42 + 7h + 2h^2) = 42$$

$$b) 1) \text{ On } f'(0), \text{ kun } f(x) = 42x + 7x^2 + 2x^3 \\ (\text{On myös } g'(1), \text{ kun } g(x) = 2x^3 + x^2 + 34x)$$

2) raja-arvo voidaan määrittää l'Hospitalin säännöllä

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{42h + 7h^2 + 2h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{42 + 14h + 6h^2}{1} \\ = \underline{42}$$

2. Olkoon  $f(x) = x^2$ . Laske derivaatta  $f'(0)$  käyttämällä derivaatan määritelmää erotusosamäärän raja-arvona.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

3. Laske seuraavien funktioiden derivaatat.

(a)  $f(x) = xe^{-x}$ ,

(b)  $f(x) = e^{-x^2/2}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ .

a)  $f(x) = xe^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (Dx) e^{-x} + x \cdot D(e^{-x}) && \text{tulon deriv. s.} \\ &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

b)  $f(x) = e^{-x^2/2} = u(s(x))$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(s(x)) \cdot s'(x) && \text{yhdistetty funktion} \\ &= e^{-x^2/2} \cdot (-x) && \text{d.s.} \\ &= -x e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

c)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = u \cdot (v^{-1})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= Du \cdot (v^{-1}) + u \cdot D(v^{-1}) \\ &= 2x \cdot \frac{1}{(x^2-1)} + x^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2-1)^2} \cdot 2x \\ &= \frac{2x(x^2-1) - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

---

(II tapa)  $f(x) = \frac{x^2-1+1}{x^2-1} = 1 + (x^2-1)^{-1}$

$$f'(x) = -1 \cdot (x^2-1)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

4. Mitkä seuraavista funktioista ovat jatkuvia tai derivoituvia pisteessä  $x = 1$ ?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 1, \\ x-1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x}{x-1},$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

a)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

∴  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

→  $f$  on jatkuva pisteessä  $x = 1$

Erotus sääntö:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \begin{cases} \frac{0-0}{h} = 0, & \text{kun } h < 0 \\ \frac{(1+h)-1}{h} = 1, & \text{kun } h > 0 \end{cases}$$

∴  $\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

→  $f$  ei ole derivoitua pisteessä  $x = 1$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

$f$  ei ole jatkuva pisteessä  $x = 1$

→  $f$  ei ole derivoitua pisteessä  $x = 1$

Mikä  $f(1)$  on epäselvää

c) Kun  $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1$$

Sovitaan, että

$$f(1) = 1+1 = 2$$

Silloin

$$f(x) = x+1 \quad \forall x$$

→  $f$  on jatkuva ja derivoituva pisteessä  $x=1$

5. Perustele seuraavat väitteet:

- (a) Funktion jatkuvuudesta ei seuraa sen derivoituvuutta.
- (b) Funktion derivoituvuudesta seuraa sen jatkuvuus.
- (c) Jos funktio ei ole jatkuva, niin se ei ole derivoituva.

(a) Perusteluksi riittää yllä funktio joka on jatkuva mutta ei derivoituva (pisteessä)

Tedävän 4a funktio on jatkuva mutta ei derivoituva pisteessä  $x=1$

(b) Olkoon  $f(a) = b$  ja  $f'(a) = c$   
eli  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c$

merkitään  $g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\rightarrow c)$

valitaan  $\varepsilon > 0$

Sitten, että  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = c$  reuraa, että on olemassa  $\delta, \frac{\varepsilon}{2c} > \delta > 0, 1 > \delta$ , siten että

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x-a) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - b}{x-a} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x) - b| < |c||x-a| + \frac{\varepsilon}{2}|x-a|$$

$$\Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = f(a)$$

$\Rightarrow f$  on jatkuva pisteessä  $x=a$

c) Sama väite kuin kohdassa (b), joten ei tarvita uutta perustelua

Huom:

$A \Rightarrow B$	sama kuin
$e^i A$ tai $B$	sama kuin
$e^i B \Rightarrow e^i A$	