MATH2040 Optimoinnin erikoiskurssi — Kevät 2010
Harjoitus 3 — **22**.1.2010

Nämä harjoitukset liittyvät osittaisderivaattoihin, gradienttiin, monen muuttujan Taylorin polynomeihin ja konkaavisuuteen/konveksisuuteen (WW osiot 11.1, 11.3 ja kotisivulla mainitut linkit

`http://en.wikipedia.org/wiki/Derivative`,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_derivative`,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient`,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_polynomial`).

Huomautus: Harjoitukset ovat jo perjantaina 22. päivä!

1. Olkoon $f(x, y) = \sin x \cos y$. Laske seuraavat osittaisderivaatat:
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x}$,
   (b) $\frac{\partial f}{\partial y}$,
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f$,
   (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f$,
   (e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$,
   (f) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f$.
2. Olkoon $f(x, y) = x^2 + e^y$. Laske gradientti(vektori) ∇f ja toisen kertaluvun gradientti(matriisi), eli *Hessin matriisi*, $\nabla^2 f$.
3. Muodosta tehtävien 1. ja 2. funktioille toisen kertaluvun Taylorin aproksimaatio pisteessä $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
4. Yhden muuttujan funktio f on *konveksi* (*konkaavi*), jos sen derivaatta f' on kasvava (vähenevä), eli sen toinen derivaatta f''on positiivinen (negatiivinen). Mitkä seuraavista funktioista ovat konkaaveja tai konvekseja?
   (a) $f(x) = x^2$,
   (b) $f(x) = -\sqrt{x}$,
   (c) $f(x) = -2x$.
5. Monen muuttujan funktio f on *konveksi* (*konkaavi*) jos sen toinen derivaatta $\nabla^2 f$on *positiivisesti (negatiivisesti) semi-definiitti*: $w^T \nabla^2 f\, w \geq 0$ $(w^T \nabla^2 f\, w \leq 0)$ kaikilla vektoreilla w. Mitkä seuraavista funktioista ovat konkaaveja tai konvekseja?
   (a) $f(x) = -x^2$,
   (b) $f(x, y, z) = \sin x \cos y$,
   (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10$.

Lisätehtävä: Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = \frac{10 \cos x \cos y}{x^2 + y^2 + 10}.$$

Laske funktion f gradientti ja etsi funktion f maksimi käyttäen jyrkimmän nousun menetelmää (WW 11.7).