

Nämä harjoitukset liittyvät konkaavisuuteen ja konveksisuuteen sekä yhden muuttujan rajoitettuun ja monen muuttujan rajoittamattomaan optimointiin (WW osiot 11.3, 11.4 ja 11.6).

1. Sairaalan päivittäiset kustannukset ovat $200.000 + 0,002x^2$ euroa, missä x on potilaiden lukumäärä päivässä. Kuinka monta potilasta tulee sairaalan ottaa päivässä, jos se halua maksimoida tehokkuutensa?
2. Tarkastelemme kahden hyödykkeen Markowitzin ongelmaa: Sijoittaja haluaa maksimoida tuottoja ja minimoida riskinsä. Hänen on päätettävä, mikä osuus w_1 omaisuudesta sijoitetaan hyödykkeeseen 1 ja mikä osuus w_2 omaisuudesta sijoitetaan hyödykkeeseen 2. Luonnollisesti $w_1 + w_2 = 1$ (ja tätä tietoa kannattaa käyttää jatkossa).

Hyödyke 1 tuottaa $\mu_1 = 10\%$ ja hyödyke 2 tuottaa $\mu_2 = 4\%$. Kokonaistuotto salkulle (w_1, w_2) on siis

$$\begin{aligned}m(w_1, w_2) &= \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 \\ &= 0,1 \cdot w_1 + 0,04 \cdot w_2.\end{aligned}$$

Hyödykkeen 1 tuoton varianssin neliöjuuri (riski) on $\sigma_1 = 30\%$, hyödykkeen 2 tuoton varianssin neliöjuuri on $\sigma_2 = 12\%$. Hyödykkeiden tuottojen välinen korrelaatio on $\rho = -10\%$. Kokonaisriski on siis

$$\begin{aligned}s^2(w_1, w_2) &= \sigma_1^2 \cdot w_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \cdot w_1w_2 + \sigma_2^2 \cdot w_2^2 \\ &= 0,09 \cdot w_1^2 - 0,0072 \cdot w_1w_2 + 0,0144 \cdot w_2^2.\end{aligned}$$

Sijoittaja on valmis riskiin $s(w_1, w_2) \leq 20\%$. Kuinka hänen tulee jakaa varallisuutensa, kun

- (a) lyhyeksi myynti on sallittua,
- (b) lyhyeksi myynti ei ole sallittua?

3. Etsi funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + x_2^4$$

kaikki (lokaalit) ääriarvot ja määrää niiden tyyppit.

4. Yhtiöllä on n tehdasta. Tehdas i on $x-y$ -tasolla paikassa (x_i, y_i) . Yhtiö haluaa rakentaa varaston sellaiseen paikkaan, että tehtaiden yhteenlaskettu etäisyys varastosta minimoituu. Mihin paikkaan varasto tulee rakentaa?
5. Olkoot $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ monen muuttujan funktioita, a_0 mikä tahansa luku ja $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiivisia lukuja.

- (a) Osoita, että jos funktiot $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ovat konkaaveja (konvekseja), niin myös funktio

$$f_{\text{sum}}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

on konkaavi (konvekxi).

- (a) Olkoot funktiot $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ konkaaveja. Onko funktio

$$f_{\min}(x) = \min \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

konkaavi?

- (c) Olkoot funktiot $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ konvekseja. Onko funktio

$$f_{\max}(x) = \max \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

konvekxi?