MATH2040 Optimoinnin erikoiskurssi — Kevät 2010

Harjoitus 6 — 17.2.2010

Nämä harjoitukset liittyvät KKT-ehtoihin (WW osio 11.9).

1. Ratkaise seuraava optimointitehtävä KKT-menetelmällä:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= x_1 - x_2, \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 1. \end{aligned}$$

2. Ratkaise seuraava optimointitehtävä KKT-menetelmällä:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Ratkaise seuraava optimointitehtävä KKT-menetelmällä:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= e^{-x_1} + e^{-2x_2} + x_3, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

4. Tarkastelemme Markowitzin ongelmaa yleisesti: Sijoittaja haluaa maksimoida tuottonsa. Hänen on päätettävä omaisuutensa osuudet $w = [w_1\ w_2 \cdots w_n]^T$, jotka hän sijoittaa hyödykkeisiin $1, 2, \ldots, n$. Luonnollisesti on oltava

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \leq 1.$$

Lisäksi lyhyeksi myyntiä ei sallita:

$$w_i \geq 0 \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n.$$

Hyödykkeet tuottavat $\mu = [\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_n]^T$. Kokonaistuotto salkulle w on siis

$$m(w) = \mu^T w.$$

Hyödykkeiden tuottojen kovarianssit ovat $K = [K_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, jolloin salkun w riskin neliö on

$$s^2(w) = w^T K w.$$

Sijoittaja on valmis riskiin $s(w) \leq s_0$. Kuinka hänen tulee jakaa varallisuutensa?

5. Tarkastelemme edellisen tehtävän tilannetta sillä erotuksella, että nyt sinoittaja haluaa minimoida riskinsä $s(w)$ sillä rajoituksella, että tuoton $m(w)$ pitää olla vähintään m_0.