MATH2040 Optimoinnin erikoiskurssi
Harjoitus 2

Kevät 2010
20.1.2010

Nämä harjoitukset liittyvät derivaattaan ja Taylorin polynomeihin (Wayne Winstonin osion 11.1 loppupää).

1. Laske funtion
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2+x_3}$$
toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 2)$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2+x_3}$$

$f_{x_1} = e^{x_2+x_3}$

$f_{x_2} = x_1 e^{x_2+x_3}$

$f_{x_3} = x_1 e^{x_2+x_3}$

$f_{x_1x_1} = 0$
$f_{x_1x_2} = e^{x_2+x_3}$
$f_{x_1x_3} = e^{x_2+x_3}$

$f_{x_2x_1} = e^{x_2+x_3}$
$f_{x_2x_2} = x_1 e^{x_2+x_3}$
$f_{x_2x_3} = x_1 e^{x_2+x_3}$

$f_{x_3x_1} = e^{x_2+x_3}$
$f_{x_3x_2} = x_1 e^{x_2+x_3}$
$f_{x_3x_3} = x_1 e^{x_2+x_3}$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \Delta x_1 \\ x_2 = 2 + \Delta x_2 \\ x_3 = 2 + \Delta x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - 1 \\ \Delta x_2 = x_2 - 2 \\ \Delta x_3 = x_3 - 2 \end{cases}$$

$$P(x) = f(1,2,2) + \sum_{|\alpha|=1}^{2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} (D^\alpha f(1,2,2))(x_1-1)^{\alpha_1}(x_2-2)^{\alpha_2}(x_3-2)^{\alpha_3}$$

$$= 1 \cdot e^{2+2} + \frac{f_{x_1}(1,2,2)}{1!\cdot 0!\cdot 0!}(x_1-1)^1 + \frac{f_{x_2}(1,2,2)}{0!\cdot 1!\cdot 0!}(x_2-2)^1$$

$$+ \frac{f_{x_3}(1,2,2)}{0!\cdot 0!\cdot 1!}(x_3-2)^1 + \frac{f_{x_1x_1}(1,2,2)}{2!\cdot 0!\cdot 0!}(x_1-1)^2$$

$$+ \frac{f_{x_1x_2}(1,2,2)}{1!\cdot 1!\cdot 0!}(x_1-1)(x_2-2) + \frac{f_{x_1x_3}(1,2,2)}{1!\cdot 0!\cdot 1!}(x_1-1)(x_3-2)$$

$$+ \frac{f_{x_2x_2}(1,2,2)}{0!\cdot 2!\cdot 0!}(x_2-2)^2 + \frac{f_{x_2x_3}(1,2,2)}{0!\cdot 1!\cdot 1!}(x_2-2)(x_3-2)$$

$$+ \frac{f_{x_3x_3}(1,2,2)}{0!\cdot 0!\cdot 2!}(x_3-2)^2$$

$$= e^4\Big(1 + (x_1-1) + (x_2-2) + (x_3-2)$$
$$+ (x_1-1)(x_2-2) + (x_1-1)(x_3-2)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x_2-2)^2 + (x_2-2)(x_3-2) + \tfrac{1}{2}(x_3-2)^2\Big)$$

$$\nabla f(1,2,2) = \begin{bmatrix} e^4 \\ e^4 \\ e^4 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(1,2,2) = \begin{bmatrix} 0 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + w\right) \approx f\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \nabla f^T w + \tfrac{1}{2} w^T \nabla^2 f\, w$$

$$= e^4 + \begin{bmatrix} e^4 & e^4 & e^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{bmatrix}$$

$$= e^4\Big(1 + (x_1-1) + (x_2-2) + (x_3-2) + (x_1-1)(x_2-2) + (x_1-1)(x_3-2)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x_2-2)^2 + (x_2-2)(x_3-2) + \tfrac{1}{2}(x_3-2)^2\Big)$$

2. Jos $P(t)$ on hyödykkeen hinta hetkellä t, sen *tuotto* hetkellä t on

$$R(t) \;=\; \frac{\Delta V(t)}{V(t-\Delta t)} \;=\; \frac{V(t) - V(t-\Delta t)}{V(t-\Delta t)},$$

missä $t-\Delta t$ on hetkeä t välittömästi edeltävä hetki. Usein kuitenkin näkee käytettävän tuotolle määritelmää

$$R(t) \;=\; \ln\frac{V(t)}{V(t-\Delta t)}.$$

Ensimmäinen määritelmä on tietysti oikein ja jälkimmäinen on väärin. Miksi jälkimmäinen määritelmä on kuitenkin "riittävän oikein"?

Taulukkokirjan mukaan

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$R_2(t) = \ln\left(\frac{V(t)}{V(t-\Delta t)}\right) = \ln\left(\frac{V(t) - V(t-\Delta t) + V(t-\Delta t)}{V(t-\Delta t)}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta V(t)}{V(t-\Delta t)}\right) = \frac{\Delta V(t)}{V(t-\Delta t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta V(t)}{V(t-\Delta t)}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\Delta V(t)}{V(t-\Delta t)}\right)^2\right)$$

→ riittävän hyvä

3. Olkoon $q = q(p)$ tuotteen kysyntä, kun tuotteen hinta on p. Hinnan p *jousto* kysynnällä q, $E = E(p) = E(p, q)$, on

$$E \;=\; \frac{\text{kysynnän suhteellinen muutos prosenteissa}}{\text{hinnan suhteellinen muutos prosenteissa}}.$$

(a) Jos hinnan muutos Δp on pieni, voidaan jousto E esittää derivaattojen avulla. Keksi kaava.

(b) Kysyntä on *elastistinen*, jos $E < -1$. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?

(c) Kysyntä *epäelastinen*, jos $-1 < E < 0$. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?

(d) Olkoon $E > 0$. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?

a) $$E = \frac{\frac{\Delta q}{q}\cdot \cancel{100\%}}{\frac{\Delta p}{p}\cdot \cancel{100\%}} = \frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = \frac{\Delta q}{q}\cdot\frac{p}{\Delta p}$$

$$= \frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p}{q} \approx \frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q} = q'(p)\cdot\frac{p}{q}$$

b) (Elastinen kysyntä)

$E < -1$ (eli $E < 0$ ja $|E| > 1$)

(i) Kun hinta nousee, niin kysyntä laskee
(ii) kysynnän %-muutos on itseisarvoltaan isompi kuin hinnan %-muutos it.arv.

c) (Epäelastinen kysyntä)

$-1 < E < 0$ (eli $E < 0$ ja $|E| < 1$)

(i) Kun hinta nousee, niin kysyntä laskee
(ii) Kysynnän %-muutos on its.arvoltaan pienempi kuin hinnan %muutos its.arv.

d) $E > 0$ hinnan noustessa kysyntä kasvaa

Myyntitulo R riippuu hinnasta

$$R(p) = p \cdot q(p)$$

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}\left(p \cdot q(p)\right) = 1 \cdot q + p\,\frac{dq}{dp}$$

$$= q\left(1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\right) = q\left(1 + E\right)$$

$$\frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}\left(p \cdot q\right) = \frac{dp}{dq} \cdot q + p \cdot 1$$

$$= p\left(\frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p} + 1\right) = p\left(1 + \frac{1}{E}\right)$$

Kun kysyntä on elastinen $E < -1$, niin

$$\frac{dR}{dp} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{dR}{dq} > 0$$

Kun kysyntä on epäelastinen $-1 < E < 0$, niin

$$\frac{dR}{dp} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{dR}{dq} < 0$$

4. Jos halutaan valmistaa x kappaletta tuotetta, se maksaa ckx^{1-b} euroa, missä $k > 0$ ja $0 < b < 1$ ovat vakioita, eli mallin parametreja.

   (a) Osoita, että mitä enemmän tuotteita valmistetaan sitä pienempi on tuotteen yksikkökustannus.

   (b) Oletetaan, että joka kerta, kun tuotantomäärä kaksinkertaistetaan, putoaa yksikkökustannus $p\%$. Osoita, että $p = 100 \cdot 2^{-b}$.

$C(x)$ = kustannukset, kun tuotetaan x kpl

$$C(x) = ckx^{1-b}$$

$AC(x)$ = yksikkökustannus, kun tuotetaan x kpl

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = ckx^{-b}$$

a) $$\frac{dAC}{dx} = \frac{d}{dx}\left(ckx^{-b}\right) = -bckx^{-b-1} < 0$$

$\longrightarrow$ $AC(x)$ on vähenevä funktio

b) $$\underline{AC(2x) = \frac{p}{100} \cdot AC(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad ck(2x)^{-b} = \frac{p}{100} \cdot ckx^{-b}$$

$$\Leftrightarrow \quad ck2^{-b}x^{-b} = \frac{p}{100} \cdot ckx^{-b} \quad \Big| \cdot \frac{x^b}{ck} \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \quad 100 \cdot 2^{-b} = p$$

5. Jos yrityksellä on käytössä k tuntia koneaikaa ja t tuntia työvoimaa, se voi valmistaa

$$v = v(k,t) = 3k^{1/3}t^{2/3}$$

vispainta.

Yrityksellä on 216 tuntia koneaikaa ja 1.000 tuntia työvoimaa. Lisätunti koneaikaa maksaa 100 € ja ja lisätunti työvoimaa maksaa 50 €. Yrityksellä on 100 € ylimääräistä rahaa. Kannattaako yrityksen käyttää se koneaikaan vai työvoimaan?

$$v(216,1000) = 3\cdot 216^{1/3}\cdot 1000^{2/3} = 3\cdot 6\cdot 100 = 1800$$

$$v_k(k,t) = 3\cdot\frac{1}{3}k^{\frac{1}{3}-1}t^{2/3} = \frac{v(k,t)}{3k}$$

$$v_t(k,t) = 3\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2v(k,t)}{3t}$$

$$v(216+1,1000) \approx v(216,1000) + \frac{v(216,1000)}{3\cdot 216}\cdot 1 = 1800 + \frac{1800}{3\cdot 216}$$
$$= 1802{,}78$$

$$v(216,1000+2) \approx v(216,1000) + \frac{2\cdot v(216,1000)}{3\cdot 1000}\cdot 2$$
$$= 1800 + \frac{2\cdot 1800}{3\cdot 1000}\cdot 2 = 1802{,}40$$

→ raha kannattaa käyttää koneajan ostamiseen

Jos käytetään $t\cdot 100$ € koneaikaan ja $(1-t)\cdot 100$ € työvoimaan $(0\le t\le 1)$, niin

$$v(216+t,1000+2(1-t)) = v(216+t,1002-2t)$$
$$= 3\cdot(216+t)^{1/3}(1002-2t)^{2/3}$$
$$= 3\cdot\Big(\underbrace{(216+t)(1002-2t)^2}_{g(t)}\Big)^{1/3} \qquad 0\le t\le 1$$

Mahd. iso arvo g:lle

$$g'(t) = 1\cdot(1002-2t)^2 + (216+t)\cdot 2(1002-2t)\cdot(-2)$$
$$= 1002^2 - 4008t + 4t^2 - 4\cdot 216\cdot 1002 + 4\cdot 216\cdot 2t - 4\cdot 1002t + 8t^2$$
$$= 12t^2 - 6288t + 138276$$

$$g'(t) = 0 \iff t = \frac{6288\pm\sqrt{(-6288)^2 - 4\cdot 12\cdot 138276}}{2\cdot 12}$$

$$\iff t = 23 \quad \text{tai} \quad t = 501$$

Välillä $0\le t\le 1$ ei ole derivaatan nollakohtia

→ Vastaus: 100 € sijoitetaan koneaikaan