

Nämä harjoitukset liittyvät derivaattaan ja Taylorin polynomeihin (Wayne Winstonin osion 11.1 loppupää).

1. Laske funtion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 2)$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_1} = e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_2} = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_3} = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_1 x_1} = 0$$

$$f_{x_1 x_2} = e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_1 x_3} = e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_2 x_1} = e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_2 x_2} = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_2 x_3} = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_3 x_1} = e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_3 x_2} = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$f_{x_3 x_3} = x_1 e^{x_2 + x_3}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \Delta x_1 \\ x_2 = 2 + \Delta x_2 \\ x_3 = 2 + \Delta x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - 1 \\ \Delta x_2 = x_2 - 2 \\ \Delta x_3 = x_3 - 2 \end{cases}$$

$$P(x) = f(1, 2, 2) +$$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} (D^\alpha f(1, 2, 2)) (x_1 - 1)^{\alpha_1} (x_2 - 2)^{\alpha_2} (x_3 - 2)^{\alpha_3}$$

$$= 1 \cdot e^{2+2} + \frac{f_{x_1}(1, 2, 2)}{1! \cdot 0! \cdot 0!} (x_1 - 1)^1 + \frac{f_{x_2}(1, 2, 2)}{0! \cdot 1! \cdot 0!} (x_2 - 2)^1$$

$$+ \frac{f_{x_3}(1, 2, 2)}{0! \cdot 0! \cdot 1!} (x_3 - 2)^1 + \frac{f_{x_1 x_1}(1, 2, 2)}{2! \cdot 0! \cdot 0!} (x_1 - 1)^2$$

$$+ \frac{f_{x_1 x_2}(1, 2, 2)}{1! \cdot 1! \cdot 0!} (x_1 - 1)(x_2 - 2) + \frac{f_{x_1 x_3}(1, 2, 2)}{1! \cdot 0! \cdot 1!} (x_1 - 1)(x_3 - 2)$$

$$+ \frac{f_{x_2 x_2}(1, 2, 2)}{0! \cdot 2! \cdot 0!} (x_2 - 2)^2 + \frac{f_{x_2 x_3}(1, 2, 2)}{0! \cdot 1! \cdot 1!} (x_2 - 2)(x_3 - 2)$$

$$+ \frac{f_{x_3 x_3}(1, 2, 2)}{0! \cdot 0! \cdot 2!} (x_3 - 2)^2$$

$$= e^4 \left(1 + (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) \right. \\ \left. + (x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 1)(x_3 - 2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 + (x_2 - 2)(x_3 - 2) + \frac{1}{2}(x_3 - 2)^2 \right)$$

$$\nabla f(1, 2, 2) = \begin{bmatrix} e^4 \\ e^4 \\ e^4 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(1, 2, 2) = \begin{bmatrix} 0 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + w\right) \approx f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \nabla f^T w + \frac{1}{2} w^T \nabla^2 f w$$

$$= e^4 + [e^4 \ e^4 \ e^4] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\Delta x_1 \ \Delta x_2 \ \Delta x_3] \begin{bmatrix} 0 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \\ e^4 & e^4 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}$$

$$= e^4 \left(1 + (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) + (x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 1)(x_3 - 2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 + (x_2 - 2)(x_3 - 2) + \frac{1}{2}(x_3 - 2)^2 \right)$$

2. Jos $P(t)$ on hyödykkeen hinta hetkellä t , sen tuotto hetkellä t on

$$R(t) = \frac{\Delta V(t)}{V(t - \Delta t)} = \frac{V(t) - V(t - \Delta t)}{V(t - \Delta t)},$$

missä $t - \Delta t$ on hetkeä t välittömästi edeltävä hetki. Usein kuitenkin näkee käytettävän tuotolle määritelmää

$$R(t) = \ln \frac{V(t)}{V(t - \Delta t)}.$$

Ensimmäinen määritelmä on tietysti oikein ja jälkimmäinen on väärin. Miksi jälkimmäinen määritelmä on kuitenkin "riittävän oikein"?

Taylorkehityksen mukaan

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$R_2(t) = \ln\left(\frac{V(t)}{V(t - \Delta t)}\right) = \ln\left(\frac{V(t) - V(t - \Delta t) + V(t - \Delta t)}{V(t - \Delta t)}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta V(t)}{V(t - \Delta t)}\right) = \frac{\Delta V(t)}{V(t - \Delta t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta V(t)}{V(t - \Delta t)}\right)^2$$

$$\rightarrow \text{riittävästi hyvä} \quad + o\left(\left(\frac{\Delta V(t)}{V(t - \Delta t)}\right)^2\right)$$

3. Olkoon $q = q(p)$ tuotteen kysyntä, kun tuotteen hinta on p . Hinnan p jousto kysynnällä q , $E = E(p) = E(p, q)$, on

$$E = \frac{\text{kysynnän suhteellinen muutos prosenteissa}}{\text{hinnan suhteellinen muutos prosenteissa}}$$

- (a) Jos hinnan muutos Δp on pieni, voidaan jousto E esittää derivaattojen avulla. Keksi kaava.
 (b) Kysyntä on *elastinen*, jos $E < -1$. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?
 (c) Kysyntä *epäelastinen*, jos $-1 < E < 0$. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?
 (d) Olkoon $E > 0$. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?

$$\begin{aligned} a) \quad E &= \frac{\frac{\Delta q}{q} \cdot 100\%}{\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%} = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{p}{\Delta p} \\ &= \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} \approx \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = q'(p) \cdot \frac{p}{q} \end{aligned}$$

b) (Elastinen kysyntä)

$$E < -1 \quad (\text{eli } E < 0 \text{ ja } |E| > 1)$$

- (i) Kun hinta nousee, niin kysyntä laskee
 (ii) kysynnän %-muutos on itseisarvoltaan isompi kuin hinnan %-muutos ite. arv.

c) (Epäelastinen kysyntä)

$$-1 < E < 0 \quad (\text{eli } E < 0 \text{ ja } |E| < 1)$$

- (i) Kun hinta nousee, niin kysyntä laskee
 (ii) kysynnän %-muutos on its. arv. oltaisiin pienempi kuin hinnan %-muutos ite. arv.

d) $E > 0$ hinnan noustella kysyntä kasvaa

Myyntitulo R riippuu hinnasta

$$R(p) = p \cdot q(p)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dp} &= \frac{d}{dp} (p \cdot q(p)) = 1 \cdot q + p \frac{dq}{dp} \\ &= q \left(1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \right) = q(1 + E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dq} &= \frac{d}{dq} (p \cdot q) = \frac{dp}{dq} \cdot q + p \cdot 1 \\ &= p \left(\frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p} + 1 \right) = p \left(1 + \frac{1}{E} \right) \end{aligned}$$

Kun kysyntä on elastinen $E < -1$, niin

$$\frac{dR}{dp} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dR}{dq} > 0$$

Kun kysyntä on epäelastinen $-1 < E < 0$, niin

$$\frac{dR}{dp} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dR}{dq} < 0$$

4. Jos halutaan valmistaa x kappaletta tuotetta, se maksaa ckx^{1-b} euroa, missä $k > 0$ ja $0 < b < 1$ ovat vakioita, eli mallin parametreja.

(a) Osoita, että mitä enemmän tuotteita valmistetaan sitä pienempi on tuotteen yksikkökustannus.

(b) Oletetaan, että joka kerta, kun tuotantomäärä kaksinkertaistetaan, putoaa yksikkökustannus $p\%$. Osoita, että $p = 100 \cdot 2^{-b}$.

$C(x)$ = kustannukset, kun tuotetaan x kpl

$$C(x) = ckx^{1-b}$$

$AC(x)$ = yleiskeskustannus, kun tuotetaan x kpl

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = ckx^{-b}$$

$$a) \quad \frac{dAC}{dx} = \frac{d}{dx}(ckx^{-b}) = -bckx^{-b-1} < 0$$

→ $AC(x)$ on vähevä funktio

$$b) \quad \underline{AC(2x) = \frac{p}{100} \cdot AC(x)}$$

$$\Leftrightarrow ck(2x)^{-b} = \frac{p}{100} \cdot ckx^{-b}$$

$$\Leftrightarrow ck2^{-b}x^{-b} = \frac{p}{100} \cdot ckx^{-b} \quad \left| \cdot \frac{x^b}{ck} \cdot 100 \right.$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot 2^{-b} = p$$

5. Jos yrityksellä on käytössä k tuntia koneaikaa ja t tuntia työvoimaa, se voi valmistaa

$$v = v(k, t) = 3k^{1/3}t^{2/3}$$

vispainta.

Yrityksellä on 216 tuntia koneaikaa ja 1.000 tuntia työvoimaa. Lisätunti koneaikaa maksaa 100€ ja lisätunti työvoimaa maksaa 50€. Yrityksellä on 100€ ylimääräistä rahaa. Kannattaako yrityksen käyttää se koneaikaan vai työvoimaan?

$$v(216, 1000) = 3 \cdot 216^{1/3} \cdot 1000^{2/3} = 3 \cdot 6 \cdot 100 = 1800$$

$$v_k(k, t) = 3 \cdot \frac{1}{3} k^{\frac{1}{3}-1} t^{2/3} = \frac{v(k, t)}{2k}$$

$$v_t(k, t) = 3 \cdot k^{1/3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2v(k, t)}{3t}$$

$$v(216+1, 1000) \approx v(216, 1000) + \frac{v(216, 1000)}{3 \cdot 216} \cdot 1 = 1800 + \frac{1800}{3 \cdot 216} = 1802,78$$

$$v(216, 1000+2) \approx v(216, 1000) + \frac{2 \cdot v(216, 1000)}{3 \cdot 1000} \cdot 2 = 1800 + \frac{2 \cdot 1800}{3 \cdot 1000} \cdot 2 = 1802,40$$

→ raha kannattaa käyttää koneajan ostamiseen

Jos käytetään $t \cdot 100$ € koneaikaan ja $(1-t) \cdot 100$ € työvoimaan ($0 \leq t \leq 1$), niin

$$\begin{aligned} v(216+t, 1000+2(1-t)) &= v(216+t, 1002-2t) \\ &= 3 \cdot (216+t)^{1/3} (1002-2t)^{2/3} \\ &= 3 \cdot \underbrace{(216+t)(1002-2t)^2}_{g(t)}^{1/3} \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Mahd. iso arvo g :lle

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 \cdot (1002-2t)^2 + (216+t) \cdot 2(1002-2t) \cdot (-2) \\ &= 1002^2 - 4008t + 4t^2 - 4 \cdot 216 \cdot 1002 + 4 \cdot 216 \cdot 2t - 4 \cdot 1002t + 8t^2 \\ &= 12t^2 - 6288t + 138276 \end{aligned}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6288 \pm \sqrt{(-6288)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 138276}}{2 \cdot 12}$$

$$\Leftrightarrow t = 23 \quad \text{tai} \quad t = 501$$

Välillä $0 \leq t \leq 1$ ei ole derivoimattomalla kohdalla
→ Vastaus: 100 € sijoitetaan koneaikaan