MATH2040 OPTIMOINNIN ERIKOISKURSSI — KEVÄT 2010

HARJOITUS 3 — **22**.1.2010

Nämä harjoitukset liittyvät osittaisderivaattoihin, gradienttiin, monen muuttujan Taylorin polynomeihin ja konkaavisuuteen/konveksisuuteen (WW osiot 11.1, 11.3 ja kotisivulla mainitut linkit

`http://en.wikipedia.org/wiki/Derivative`,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_derivative`,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient`,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_polynomial`).

Huomautus: Harjoitukset ovat jo perjantaina 22. päivä!

1. Olkoon $f(x,y) = \sin x \cos y$. Laske seuraavat osittaisderivaatat:
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x}$,
   (b) $\frac{\partial f}{\partial y}$,
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f$,
   (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f$,
   (e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$,
   (f) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f$.

$f(x,y) = \sin x \cos y$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y$ b) $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y$

c) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin x \cos y$ d) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin x \cos y$

e) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\cos x \sin y$ f) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\cos x \sin y$

2. Olkoon $f(x,y) = x^2 + e^y$. Laske gradientti(vektori) ∇f ja toisen kertaluvun gradientti(matriisi), eli *Hessin matriisi*, $\nabla^2 f$.

$f(x,y) = x^2 + e^y$ $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ e^y \end{bmatrix}$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e^y \end{bmatrix}$$

3. Muodosta tehtävien 1. ja 2. funktioille toisen kertaluvun Taylorin aproksimaatio pisteessä $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

1. $f(x,y) = \sin x \cos y$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f_x \cdot x + f_y \cdot y + \frac{1}{2} f_{xx} x^2 + f_{xy} xy + \frac{1}{2} f_{yy} y^2$$
$$= 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot y^2$$
$$= x$$

2. $f(x,y) = x^2 + e^y$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f_x \cdot x + f_y \cdot y + \frac{1}{2} f_{xx} x^2 + f_{xy} xy + \frac{1}{2} f_{yy} y^2$$
$$= 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + 0 \cdot xy + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y^2$$
$$= 1 + y + x^2 + \frac{1}{2} y^2$$

4. Yhden muuttujan funktio f on *konveksi* (*konkaavi*), jos sen derivaatta f' on kasvava (vähenevä), eli sen toinen derivaatta f''on positiivinen (negatiivinen). Mitkä seuraavista funktioista ovat konkaaveja tai konvekseja?

(a) $f(x) = x^2$,
(b) $f(x) = -\sqrt{x}$,
(c) $f(x) = -2x$.

a) $f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2 > 0$
Konveksi

b) $f(x) = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$
$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-3/2} > 0$
konveksi

c) $f(x) = -2x$
$f'(x) = -2$
$f''(x) = 0$
rajatapaus

5. Monen muuttujan funktio f on *konveksi* (*konkaavi*) jos sen toinen derivaatta $\nabla^2 f$on *positiivisesti (negatiivisesti) semi-definiitti*: $w^T \nabla^2 f\, w \geq 0$ ($w^T \nabla^2 f\, w \leq 0$) kaikilla vektoreilla w. Mitkä seuraavista funktioista ovat konkaaveja tai konvekseja?

(a) $f(x) = -x^2$,

(b) $f(x, y, z) = \sin x \cos y$,

(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10$.

a) $\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \\ f_x &= -2x \\ f_{xx} &= -2 \end{aligned}\right\}$ $\nabla^2 f = [-2]$

$w^T \nabla^2 f\, w = [x][-2][x] = -2x^2 \leq 0$

$\rightarrow$ konkaavi funktio

---

b) $f(x,y,z) = \sin x \cos y$

$f_x = \cos x \cos y$ $\qquad f_{xx} = -\sin x \cos y$

$f_y = -\sin x \sin y$ $\qquad f_{xy} = f_{yx} = -\cos x \sin y$

$f_z = 0$ $\qquad f_{xz} = 0,\ f_{yz} = 0,\ f_{zz} = 0$

$\qquad f_{yy} = -\sin x \cos y$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y & 0 \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w^T \nabla^2 f\, w = [w_1\ w_2\ w_3] \begin{bmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y & 0 \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$= -\sin x \cos y \cdot w_1^2 - 2\cos x \sin y \cdot w_1 w_2 - \sin x \cos y \cdot w_2^2$$

pisteessä $x = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$ ($\sin x = 0$)

$$w^T \nabla^2 f\, w \Big|_{\substack{x=0 \\ y=\pi/2}} = 2 w_1 w_2$$

lausekkeen merkki voi olla + ja voi olla −

$\rightarrow$ merkki ei ole määräytynyt (determinististä)

$\rightarrow$ funktio ei ole konveksi eikä konkaavi

c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lisätehtävä: Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = \frac{10 \cos x \cos y}{x^2 + y^2 + 10}.$$

Laske funktion f gradientti ja etsi funktion f maksimi käyttäen jyrkimmän nousun menetelmää (WW 11.7).

$$f(x,y) = \frac{10 \cos x \cos y}{(x^2 + y^2 + 10)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-10 \sin x \cos y \, (x^2 + y^2 + 10) - 10 \cos x \cos y \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + 10)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-10 \cos x \sin y \, (x^2 + y^2 + 10) - 10 \cos x \cos y \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + 10)^2}$$

```
> maxima
set_plot_option ([plot_format, gnuplot]);
gnuplot_start();
plot3d (10*cos(x)*cos(y)/(x^2+y^2+10),
        [x,-3,3], [y,-3,3]);
```

wxmaxima

```
function v = f(z);
% f.m(x)
% Laskee funktion arvon.
% z = [x,y]' in R^2
%---------------------
x = z(1);
y = z(2);
v = 10*cos(x)*cos(y)/(x^2+y^2+10);
```

```
function vec = gradf(z);
% gradf.m(x)
% Laskee funktion gradientivektorin pisteessÃ¤ z.
% z = [x,y]' ja v = [v1,v2]' in R^2
%---------------------
x = z(1);
y = z(2);
v1 = (-10*sin(x)*cos(y)*(x^2+y^2+10)-20*x*cos(x)*cos(y))/(x^2+y^2+10)
^2;
v2 = (-10*cos(x)*sin(y)*(x^2+y^2+10)-20*y*cos(x)*cos(y))/(x^2+y^2+10)
^2;
vec = [v1;v2];
```

```
%h3lisa0.m
% harjoitus 3 lisÃ¤tehtÃ¤vÃ¤
% 0: piirretÃ¤Ã¤n kolmiulotteinen kuva
% ------------------------------

n = 40;
x = linspace(-4,4,n);
y = linspace(-4,4,n);
z = zeros(n,n);
for i=1:n
   for j=1:n
      z(i,j) = f([x(i),y(j)]');
   end
end

surf(x,y,z);
```

```
%h3lisa1.m
% harjoitus 3 lisÃ¤tehtÃ¤vÃ¤
% 1: piirretÃ¤Ã¤n tasa-arvokÃ¤yrÃ¤stÃ¶
% ------------------------------

n = 20;
x = linspace(-4,4,n);
y = linspace(-4,4,n);
z = zeros(n,n);
for i=1:n
   for j=1:n
      z(i,j) = f([x(i),y(j)]');
   end
end

contour(x,y,z);
```

```
%h3lisa2.m
% harjoitus 3 lisÃ¤tehtÃ¤vÃ¤
% 1: piirretÃ¤Ã¤n tasa-arvokÃ¤yrÃ¤stÃ¶
% 2: etsitÃ¤Ã¤n optimia
% ------------------------------

n = 20;
x = linspace(-4,4,n);
y = linspace(-4,4,n);
z = zeros(n,n);
for i=1:n
   for j=1:n
      z(i,j) = f([x(i),y(j)]');
   end
end

hold off
contour(x,y,z);
hold on;

m = 20;
s = 0.2;
xk = linspace(0,0,m);
yk = linspace(0,0,m);
xk(1) = 1.0;
yk(1) = 1.0;
for k=2:m
  p = [xk(k-1),yk(k-1)]';
  p2 = (p + s*gradf(p));
  xk(k) = p2(1);
  yk(k) = p2(2);
end

plot(xk,yk,'k-o');
axis([-4,4,-4,4]);
hold off
```