MATH2040 Optimoinnin erikoiskurssi — Kevät 2010

Harjoitus 4 — 3.2.2010

Nämä harjoitukset liittyvät konkaavisuuteen ja konveksisuuteen sekä yhden muuttujan rajoitettuun ja monen muuttujan rajoittamattomaan optimointiin (WW osiot 11.3, 11.4 ja 11.6).

1. Sairaalan päivittäiset kustannukset ovat $200.000 + 0{,}002x^2$ euroa, missä x on potilaiden lukumäärä päivässä. Kuinka monta potilasta tulee sairaalan ottaa päivässä, jos se halua maksimoida tehokkuutensa?

$$f(x) = \frac{200\,000 + 0{,}002x^2}{x} = 200\,000\,x^{-1} + 0{,}002x, \quad x>0$$

$$f'(x) = -200\,000\,x^{-2} + 0{,}002 \quad \text{jatkuva, kun } x>0$$

$$f''(x) = +400\,000\,x^{-3} > 0 \quad \text{kun } x>0 \rightarrow f \text{ KONVEKSI}$$

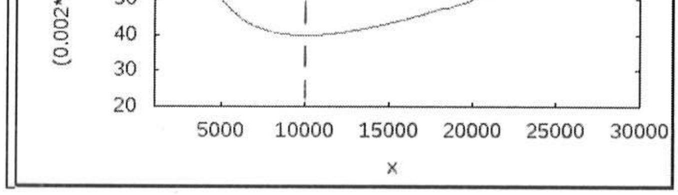
$$f'(x)=0 \iff -200\,000\,x^{-2} + 0{,}002 = 0$$

$$\iff \frac{200\,000}{x^2} = 0{,}002$$

$$\iff x^2 = 100\,000\,000$$

$$\iff x = 10\,000$$

Vastaus: Sairaalassa tulee olla noin 10 000 potilasta



2. Tarkastelemme kahden hyödykkeen Markowitzin ongelmaa: Sijoittaja haluaa maksimoida tuottonsa ja minimoida riskinsä. Hänen on päätettävä, mikä osuus w_1 omaisuudesta sijoitetaan hyödykkeeseen 1 ja mikä osuus w_2 omaisuudesta sijoitetaan hyödykkeeseen 2. Luonnollisesti $w_1 + w_2 = 1$ (ja tätä tietoa kannattaa käyttää jatkossa).

Hyödyke 1 tuottaa $\mu_1 = 10\%$ ja hyödyke 2 tuottaa $\mu_2 = 4\%$. Kokonaistuotto salkulle (w_1, w_2) on siis

$$\begin{aligned} m(w_1, w_2) &= \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 \\ &= 0{,}1 \cdot w_1 + 0{,}04 \cdot w_2. \end{aligned}$$

Hyödykkeen 1 tuoton varianssin neliöjuuri (riski) on $\sigma_1 = 30\%$, hyödykkeen 2 tuoton varianssin neliöjuuri on $\sigma_2 = 12\%$. Hyödykkeiden tuottojen välinen korrelaatio on $\rho = -10\%$. Kokonaisriski on siis

$$\begin{aligned} s^2(w_1, w_2) &= \sigma_1^2 \cdot w_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \cdot w_1 w_2 + \sigma_2^2 \cdot w_2^2 \\ &= 0{,}09 \cdot w_1^2 - 0{,}0072 \cdot w_1 w_2 + 0{,}0144 \cdot w_2^2. \end{aligned}$$

Sijoittaja on valmis riskiin $s(w_1, w_2) \leq 20\%$. Kuinka hänen tulee jakaa varallisuutensa, kun

(a) lyhyeksi myynti on sallittua,
(b) lyhyeksi myynti ei ole sallittua?

a)
$$\begin{cases} \text{Max } m(w_1, w_2) = 0{,}1 w_1 + 0{,}04 w_2 \\ \text{kun } s^2(w_1, w_2) = 0{,}09 w_1^2 - 0{,}0072 w_1 w_2 + 0{,}0144 w_2^2 \leq 0{,}04 \\ \text{ja } w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

Merkitään $w_1 = x$ ja $w_2 = 1 - x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Max } \tilde{m}(x) = 0{,}1x + 0{,}04(1-x) \\ \text{kun } 0{,}09x^2 - 0{,}0072x(1-x) + 0{,}0144(1-x)^2 \leq 0{,}04 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max } \tilde{m}(x) = 0{,}06x + 0{,}04 \\ \text{kun } 0{,}1116x^2 - 0{,}036x - 0{,}0256 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max } \tilde{m}(x) = 0{,}06x + 0{,}04 \\ \text{kun } -0{,}3441 \leq x \leq 0{,}6667 \end{cases}$$

$x^* = 0{,}6667 \quad m^* = 0{,}06 \cdot x^* + 0{,}04 = 0{,}0800$
$w_1^* = 0{,}6667, \quad w_2^* = 0{,}3333$

b) $$\begin{cases} \text{Max } m(w_1, w_2) = 0{,}1 w_1 + 0{,}04 w_2 \\ \text{kun } s^2(w_1, w_2) = 0{,}09 w_1^2 - 0{,}0072 w_1 w_2 + 0{,}0144 w_2^2 \le 0{,}04 \\ \text{ja } w_1 + w_2 = 1 \\ \text{ja } 0 \le w_1 \le 1, \ 0 \le w_2 \le 1 \end{cases}$$

Merkitään $w_1 = x$ ja $w_2 = 1 - x$, $0 \le x \le 1$

$$\begin{cases} \text{Max } \tilde{m}(x) = 0{,}1x + 0{,}04(1-x) \\ \text{kun } 0{,}09x^2 - 0{,}0072x(1-x) + 0{,}0144(1-x)^2 \le 0{,}04 \\ \text{ja } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max } \tilde{m}(x) = 0{,}06x + 0{,}04 \\ \text{kun } -0{,}3441 \le x \le 0{,}6667 \\ \text{ja } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$x^* = 0{,}6667$, $m^* = 0{,}06 \cdot x^* + 0{,}04 = 0{,}0800$

$w_1 = 0{,}6667$ ja $w_2 = 0{,}3333$

Tehtävään 3 liittyvä kuva

Ks. seur. sivu