3. Etsi funktion

$$f(x_1, x_2) \;=\; x_1^3 - 3x_1x_2^2 + x_2^4$$

kaikki (lokaalit) ääriarvot ja määrää niiden tyypit.

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + x_2^4$$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 \\ -6x_1x_2 + 4x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 + 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

Kriittiset pisteet

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2^2 = 0 \\ -6x_1x_2 + 4x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \\ 2x_2(-3x_1 + 2x_2^2) = 0 \end{cases} \rightarrow x_2 = \pm x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \pm x_1 \\ x_1(-3x_1 + 2x_1^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \pm x_1 \\ x_1^2(-3 + 2x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 3/2 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$$

Kriittisten pisteiden tyypit

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ?$$ ei ratkaise kriittisen pisteen tyyppiä

$f(x_1, 0) = x_1^3 \rightarrow$ mielivaltaisen lähellä pistettä $(0,0)$ löytyy pisteitä, joissa funktion arvo on isompi (pienempi) kuin pisteessä $(0,0)$ $\rightarrow$ $(0,0)$ ei ole ääriarvokohta

$$\nabla f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \begin{bmatrix} 6\cdot\frac{3}{2} & -6\cdot\frac{3}{2} \\ -6\cdot\frac{3}{2} & -6\cdot\frac{3}{2}+12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$$

positiivisesti definiitti $\rightarrow$ minimikohta

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$= \frac{27}{8} - 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4} + \frac{81}{16} = -27/16$$

$$\nabla f\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \begin{bmatrix} 6\cdot\frac{3}{2} & 6\cdot\frac{3}{2} \\ 6\cdot\frac{3}{2} & -6\cdot\frac{3}{2}+12\left(\frac{-3}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$$

positiivisesti definiitti $\rightarrow$ minimikohta

$$f\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^4 = -27/16$$

Vastaus minimikohdat $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ ja $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Kummassakin minimikohdassa funktio saa arvon $-27/16$