4. Yhtiöllä on n tehdasta. Tehdas i on $x-y$-tasolla paikassa (x_i, y_i). Yhtiö haluaa rakentaa varaston sellaiseen paikkaan, että tehtaiden yhteenlaskettu etäisyys varastosta minimoituu. Mihin paikkaan varasto tulee rakentaa?

Tarkastellaan ensin hieman muutettua ongelmaa. Olkoon varasto paikassa (x,y)

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]$$

Tämä tavoitefunktio on siis etäisyyksien neliöiden summa.

$$\tilde{f}_x = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(x-x_i) = 2nx - 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Vastaavasti

$$\tilde{f}_y = 2ny - 2\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \nabla^2\tilde{f} = \begin{bmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{bmatrix}$$

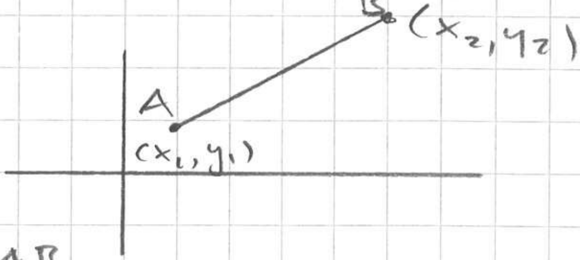
Nyt $\nabla\tilde{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x = \frac{1}{n}\sum x_i \\ y = \frac{1}{n}\sum y_i \end{cases}$

Siis: varasto sijoitetaan tehdasjoukon "keskipisteeseen"

Seuraavaksi palataan tehtävässä annettuun tavoitefunktioon

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{1/2}$$

Tarkastellaan paria erikoistapausta

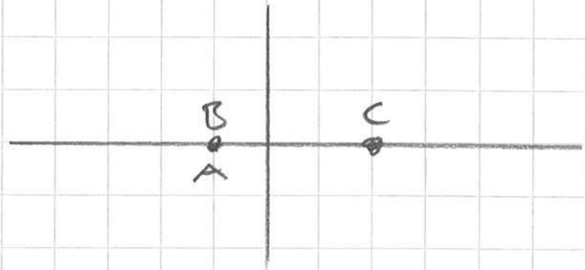


Kaksi tehdasta

Kaikki tehtaita yhdistävän janan AB pisteet ovat yhtä hyviä sijoituspaikkoja, optimaalisia!

Kolme tehdasta

$$A: (x_1, y_1) = (-1, 0)$$
$$B: (x_2, y_2) = (-1, 0)$$
$$C: (x_3, y_3) = (2, 0)$$



A- ja B-tehdas ovat siis samassa korttelissa

Nyt $(x^*, y^*) = (-1, 0) \neq$ keskipiste $(0,0)$

$\therefore$ { vastaus ei ole keskipiste
vastaus ei välttämättä ole yksikäsitteinen

Gradientti

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]^{1/2}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]^{1/2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]^{-1/2}\cdot 2(x-x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

Vastaavasti

$$f_y = \sum_{i=1}^{n}\frac{(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

Tarkastellaan pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevalla vektorin $\bar{u} = (u_1, u_2)$ suuntaisella viivalla funktion

[YKSI TEHTAVÄ]

$$g_i(x,y) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

arvoja. Merkitään $x_0 - x_i = \tilde{x}_i$ ja $y_0 - y_i = \tilde{y}_i$

$$g_i(t) = g_i(x_0 + tu_1,\ y_0 + tu_2)$$
$$= \left((\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right)^{1/2}$$

$$g_i'(t) = \tfrac{1}{2}\left((\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[2(\tilde{x}_i + tu_1)u_1 + 2(\tilde{y}_i + tu_2)\cdot u_2\right]$$

$$= \frac{(\tilde{x}_i + tu_1)u_1 + (\tilde{y}_i + tu_2)u_2}{\left((\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right)^{1/2}}$$

$$g_i''(t) = \frac{(u_1^2 + u_2^2)\left[(\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right]^{1/2}}{\left[(\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right]} - \frac{\left\{(\tilde{x}_i + tu_1)u_1 + (\tilde{y}_i + tu_2)u_2\right\}^2 \left[(\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[(\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right]}$$

$$= \frac{u_1^2(\tilde{y}_i + tu_2)^2 - 2u_1u_2(\tilde{x}_i + tu_1)(\tilde{y}_i + tu_2) + u_2^2(\tilde{x}_i + tu_1)^2}{\left[(\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\left(u_1(\tilde{y}_i + tu_2) - u_2(\tilde{x}_i + tu_1)\right)^2}{\left[(\tilde{x}_i + tu_1)^2 + (\tilde{y}_i + tu_2)^2\right]^{3/2}} \geq 0$$

$\therefore$ $g_i(t)$ on konveksi

$\Rightarrow f(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)$ on konveksi $\forall (x_0, y_0), \forall (u_1, u_2)$
(teht. 5!)

$\therefore$ Tavoitefunktio on konveksi

KRIITTINEN PISTE

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} = 0 \end{cases}$$

VAIKEA !

VAIKKA ON OLEMASSA

$\rightarrow$ pakko ratkaista numeerisesti

5. Olkoot $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ monen muuttujan funktioita, a_0 mikä tahansa luku ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia lukuja.

(a) Osoita, että jos funktiot $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_nx(x)$ ovat konkaaveja (konvekseja), niin myös funktio

$$f_{\text{sum}}(x) \quad = \quad a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$$

on konkaavi (konveksi).

(a) Olkoot funktiot $f_1(x), f_2(x), \ldots, f(x)$ konkaaveja. Onko funktio

$$f_{\min}(x) \quad = \quad \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

konkaavi?

(c) Olkoot funktiot $f_1(x), f_2(x), \ldots, f(x)$ konvekseja. Onko funktio

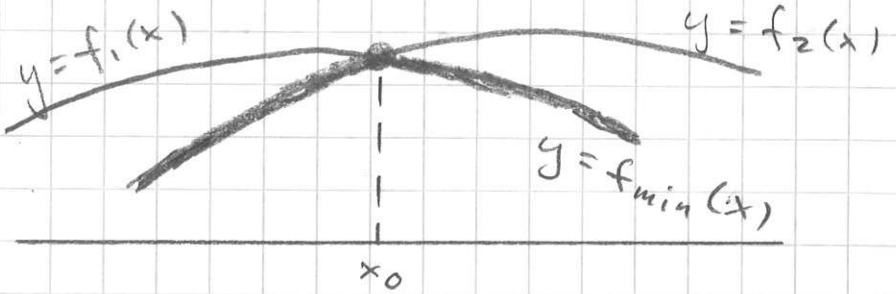
$$f_{\max}(x) \quad = \quad \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

konveksi?

a)
$$f'_{sum}(x) = \frac{d}{dx}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i'(x)$$

$$f''_{sum}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i'(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{f_i''(x)}_{\substack{<0 \\ (>0)}} \quad \begin{matrix} < 0 \\ (>0) \end{matrix}$$

b)



välillä $x < x_0$ f_{min} on konkaavi, koska f_2 on konkaavi
välillä $x > x_0$ f_{min} on konkaavi, koska f_1 on konkaavi
pisteellä $x = x_0$ ei f_{min} ole derivoituva!
Silti on selvää, että f_{min} on "enemmän konkaavi" kuin f_1 tai f_2 $\xrightarrow[\text{induktio}]{}$ f_{min} on konkaavi

c) Mutatis Mutandis!