5. Osoita, että kaikille luvuille $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pätee

$$n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2,$$

ja yhtälö pätee ainoastaan, kun $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(1) Kun $n=2$ RHS ja LHS saavat muodot

$$RHS = \left(\sum_{k=1}^{2} x_k\right)^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$LHS = 2\sum_{k=1}^{2} x_k^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_2 \geq RHS$$

Epäyhtälö on siis tosi, kun $n=2$.
yhtälö pätee vain, kun $x_1 = x_2$.

(2) Oletamme, että epäyhtälö on tosi, kun $n = 2, \cdots, p$
ja oletamme että yhtälö on voimassa ainoastaan,
kun $x_1 = x_2 = \cdots = x_p$

(3) Induktioväite: Epäyhtälö on tosi, kun $n = p+1$
ja yhtälö on silloin voimassa vain jos $x_1 = x_2 = \cdots = x_{p+1}$

(4) Induktiotodistus

$$RHS = \left(\sum_{k=1}^{p+1} x_k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) + x_{p+1}\right]^2$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)^2 + 2x_{p+1}\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) + x_{p+1}^2$$

$$LHS = (p+1)\sum_{k=1}^{p+1} x_k^2 = (p+1)\sum_{k=1}^{p} x_k^2 + (p+1)x_{p+1}^2$$
$$= p\sum_{k=1}^{p} x_k^2 + \sum_{k=1}^{p} x_k^2 + p x_{p+1}^2 + x_{p+1}^2$$
$$= \underbrace{p\sum_{k=1}^{p} x_k^2}_{\underset{ind.ol}{\geq} (\sum x_k)^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{p+1})^2}_{\geq 0} + 2\sum_{k=1}^{p} x_{p+1}x_k + x_{p+1}^2$$

$\geq RHS$ (yhtälö vain jos $x_{p+1} = x_1 = x_2 = \cdots = x_p$) $\square$

5. Osoita, että kaikille luvuille $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pätee

$$n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \;\geq\; \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2,$$

ja yhtälö pätee ainoastaan, kun $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

$$\min_{\bar{x}} \tilde{f}(\bar{x}) = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2$$

$$\tilde{f}(\bar{x}) = n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) - \left(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n\right)^2$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = 2n x_i - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot 1 \rightarrow$$

kriittisessä pisteessä $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^* = x^*$ ja $\tilde{f}(\bar{x}^*) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right) = \begin{cases} -2, & \text{kun } j \neq i \\ 2n-2, & \text{kun } j = i \end{cases}$$

Kun $n = 4$, niin H on

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \leftarrow$$

on positiivisesti definiitti, mutta definiittisyys on hankala tutkia

---

toinen yritys $\rightarrow$

valitaan $s \in \mathbb{R}$ ja $A = \{ \bar{x} \mid \sum x_i = s \}$

$$\begin{cases} \min f(\bar{x}) = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \text{konveksi} \\ \text{s.t. } h(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k - s = 0 & \text{affiini} \end{cases}$$

$\rightarrow$ globi minimi

Lagrange:

$$L = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - s \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = n \cdot 2x_i + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad x_i = \frac{\lambda}{2n} \ (\forall i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{n} x_k - s = 0 \quad \rightarrow \quad x_i = \frac{s}{n} \ (\forall i)$$

$$\therefore x_i^* = \frac{s}{n} \ (\forall i)$$

$$\min_{\bar{x} \in A} f(\bar{x}) = f(\bar{x}^*) = n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{s}{n} \right)^2 = s^2$$

$$\begin{cases} \text{pisteessä } \bar{x}^* \in A \text{ pätee } f(\bar{x}^*) = s^2 \\ \text{Muissa } A\text{:n pisteissä } \bar{x} \neq \bar{x}^* \text{ on } f(\bar{x}) \geq s^2 \end{cases}$$

Olkoon nyt $\bar{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ mikä tahansa piste.
valitaan $s = \sum x_i$. Silloin

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_i \right)^2 = s^2 = f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x}) = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$